世界著名科学家传记

数学家 IV

吴文俊 主编

科学出版社

世界著名科学家传记

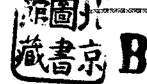
数学家

IV

吴文俊 主编

科学出版社

1992



（京）新登字092号

内 容 简 介

《世界著名科学家传记·数学家》分六集出版，收入世界著名数学家的传记100余篇。本集（第四集）收入5世纪到19世纪的著名数学家如阿耶波多、卡西、韦达、卡瓦列里、格拉斯曼等人的传记32篇。作者在深入研究的基础上，对这些科学家的生平、学术活动、主要贡献和代表作，予以全面、具体、准确的记述，并指明参考文献，即通过介绍科学家的学术生涯，向读者提供有关科学史的实用而可靠的材料。读者不仅可以从中了解到这些第一流科学家的杰出成就和对科学发展的重大影响，而且还可以看到他们的成长道路、成功经验和思想品格，从而受到深刻的启迪。

世界著名科学家传记
数 学 家
IV
吴文俊 主编
责任编辑 孔国平
科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100707
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
1992年12月第 一 版 开本：850×1168 1/32
1992年12月第一次印刷 印张：7 7/8
印数：1—2 000 字数：202 000
ISBN 7-03-002985-2/Z · 179
定价：8.20元

《科学家传记大辞典》

数学学科编委会

前　　言

在中国科学院的领导下，科学出版社正在组织我国专家编纂一部大型的科学家传记辞典，计划收入古今中外重要科学家(包括数学家、物理学家、天文学家、化学家、生物学家、医学家、地理学家、以及技术科学家即发明家和工程师等)的传记约8000篇，字数估计为2000万．辞典将对所收科学家的生平、学术活动、主要贡献和代表作，予以全面、具体、简洁、准确的记述，并附文献目录；即通过介绍科学家的学术生涯，向读者提供有关科学史的实用而可靠的资料，特别是那些第一流科学家的最深入的研究工作和成功经验．其中将以足够的篇幅介绍我国古代和现代科学家的重大成就，以及他们为发展祖国的科学事业，不惧险阻，勇攀高峰的精神，以激励青年一代奋发图强，献身"四化"．这就是编纂这部《科学家传记大辞典》的基本目的．

大辞典总编委会由各科学领域的60余位著名学者组成，卢嘉锡同志担任主编，严东生、周光召、吴文俊、王绶琯、涂光炽、吴阶平、苏世生等同志担任副主编．1988年8月，在北京召开了总编委会第一次会议，讨论了大辞典的编纂方针，制定了"编写条例"．各学科的编委会也已相继成立．在总编委会和各学科编委会的领导和组织下，编纂工作已全面展开．科学出版社设立了《科学家传记大辞典》编辑组，负责大辞典的编辑组织工作．

对于外国科学家，各学科编委会已分别确定第一批撰稿的最重要的科学家名单，共约800人，并已约请有关专家分头执笔撰稿．在大辞典出版之前，按不同学科，定稿每达20—30篇，就以《世界著名科学家传记》文集的形式及时发表．这些传记是在进行深入研究的基础上撰写的，又经过比较严格的审核，因而已具有较高的学术水平和参考价值．发表后广泛听取意见，以便将来收入

大辞典时进行必要的修改。

由于这部大辞典是我国编辑的，因而中国科学家辞条占重要地位，将下大功夫认真撰写。关于中国古代（19 世纪以前）科学家的传记，计划收入 200 余篇，已委托中国科学院自然科学史研究所的专家组织撰写；中国现代科学家的传记，计划收入 500 余篇，正在由各学科编委会组织撰写。

编纂这部《科学家传记大辞典》，是我国科学文化方面的一项具有重大意义的基本建设；国家新闻出版署已将其列入国家重点辞书规划。这项工作得到了我国学术界的广泛支持。已有许多学者、专家热情地参加工作。他们认为，我国学术界对于科学史研究的兴趣正在与日俱增，只要充分调动中国科学院、各高等院校、各学术团体的力量，认真进行组织，花费若干年的时间，是完全可以编好这部辞典的。他们还认为，组织编写这部辞典，对于科学史的学术研究也是一个极大的促进。在编写过程中，对于尚未掌握的材料，还不清楚的问题，必须进行深入的研究，以任务促科研，有了成果，自然容易写出好文章。

编纂这样一部大型的辞典，涉及面广，要求质量高，工作量很大。这里，我们热切地希望有更多的、热心这项事业的学者、专家参加工作，承担撰稿和审稿任务。

我们热烈欢迎广大读者对我们的工作提出宝贵意见。

《科学家传记大辞典》编辑组

目　　录

博伊西斯……………………………………………………王青建（1）

阿耶波多……………………………………………………陈一心（6）

瓦拉哈米希拉………………………………………………孙　康（12）

婆罗摩笈多…………………………………………………陈一心（16）

花拉子米……………………………………………………杜瑞芝（21）

马哈维拉……………………………………………………陈一心（33）

巴塔尼………………………………………………………王青建（39）

艾布瓦法……………………………………………………孙宏安（44）

比鲁尼………………………………………………………孙宏安（54）

奥马海亚姆…………………………………………………梁宗巨（61）

婆什迦罗……………………………………………………陈一心（72）

斐波那契……………………………………………………欧阳绛（80）

纳西尔丁……………………………………………………王青建（89）

奥雷姆………………………………………………………梁宗巨（96）

卡西…………………………………………………………梁宗巨（103）

雷格蒙塔努斯………………………………………………邵明湖（113）

许凯…………………………………………………………黄　丽（120）

帕乔利………………………………………………………王青建（126）

塔尔塔利亚…………………………………………………王青建（132）

卡尔达诺……………………………………………………王青建（138）

邦贝利………………………………………………………王青建（146）

韦达…………………………………………………………王青建（150）

斯蒂文………………………………………………………邵明湖（159）

纳皮尔………………………………………………………欧阳绛（167）

德扎格………………………………………………………赵林峰（174）

卡瓦列里……………………………………………………孙宏安（185）
达朗贝尔……………………………………………………易照华（198）
泊松…………………………………………………………老　亮（208）
庞斯列………………………………………………………周耀珊（213）
格林…………………………………………………………李文林（218）
波尔约………………………………………………………蒋中池（226）
格拉斯曼……………………………………………………陈竹如（235）

博 伊 西 斯

王 青 建
（辽宁师范大学）

博伊西斯，A. M. S. (Boethius, Anicius Manlius Severinus)约公元475或480年生于意大利罗马；约公元524或525年卒于意大利帕维亚（Pavia）附近．逻辑学、数学、音乐、哲学、神学．

博伊西斯出身于古罗马贵族世家．祖父当过地方行政长官．父亲曼柳斯（Manlius Boethius）曾任古罗马执政官．博伊西斯年轻丧父，受到罗马显贵西马丘斯（Symmachus）的保护和资助．后来娶西马丘斯的女儿鲁斯蒂恰娜（Rusticiana）为妻．有关博伊西斯的生平文献很少，根据史料推断，他本人早年可能在亚历山大学习，也可能去过雅典，受到正统的希腊文化教育，有渊博的学识．约在公元510年任东哥特（Gothic）王国执政官，逐渐成为国王宠臣．约于520年当上首席执政官，掌管元老院的部分事务．他的两个儿子不久也当上了执政官．据可靠史料记载，他在公元522年遭监禁．当时罗马政治家阿尔比纳斯（Albinus，?—约公元524年）犯有背叛国王罪，博伊西斯为他在元老院做辩护演说，被西奥多里克（Theodoric）国王指控为谋反罪，在帕维亚被捕入狱，囚于附近一城堡中．两年后与阿尔比纳斯等人一起被处决．

博伊西斯主要以政治家和哲学家留名青史．在政治上他有过辉煌时期，死后被认为是殉道者．在哲学上他最早将亚里士多德

(Aristotle)《工具论》(Organon)中的《范畴篇》(Categories)和《解释篇》(De interpretatione)等著作译为拉丁文传到西欧，还对其中一些著作做了注释，并声称要翻译并注释所有能找到的亚里士多德和柏拉图(Plato)两人的著作．他将哲学分为思辨哲学和实践哲学两部分：思辨哲学包括自然哲学、数学和神学；实践哲学包括伦理学、政治学和经济学． 他提出的"共相"是否真实存在的问题，成为经院哲学唯名论与实在论争论的焦点．其代表作有在狱中写就的5卷本《哲学的安慰》(De Consolatione Philosophiae,公元 523—524年)和对希腊学者波菲利(Porphyry，约公元234—约305年)的哲学著作《导论》(Isagoge)所作的注释(约公元507年)．这些论著充分反映了他的宗教思想与道德哲学观点，被译为多种文字广泛流传．他的哲学是古希腊罗马哲学到中世纪经院哲学的过渡，在西方哲学史上占有重要地位．

博伊西斯的数学著作主要有《算术入门》二卷(De institutione arithmetica)和《几何学》(Geometria)，写作年代不详． 现存有流传于中世纪的一些版本，例如在巴塞尔(Basel)出版的博伊西斯《全集》(Opera Omnia, 1493)．《算术入门》包括算术的基本概念和术语，乘法表，比例，素数与合数等方面的知识等，基本取材于希腊数学家尼科马霍斯(Nicomachus of Gerase)的同类著作《算术入门》(Introductionis Arithmeticae)，但删掉了许多在当时较新颖的命题和证明，其目的是为教会学校学习算术知识提供一个初级手册．《几何学》主要取材于欧几里得(Euclid)《几何原本》前几卷的内容，同样删掉了许多必要的证明，成为一本非常浅显易读的几何课本．由于博伊西斯被教会认为是殉道者，因此这两本书在中世纪被定为教会学校的经典教本，流传近千年．这种情形反映出中世纪数学相对于希腊数学繁荣时的萧条．希腊文化通过罗马人传到中世纪的很少，其中大部分体现在博伊西斯的著述中．

博伊西斯除传播希腊数学外，也做出自己的一些贡献，主要是在《几何学》中记载了一种罗马算盘的构造及其用法．这种算盘不

同于已出土的罗马算盘实物，它不用卵石小珠球一类的东西做算盘子，而是用一种类似于锥体的小圆台（apices）当算子．它的顶部分别标有1—9的数码字，以表示各自代表的值．使用时放入算盘的不同档中，表示该档应有的算子数目．博伊西斯书中算子上描绘的数字引起数学史家的兴趣，因为它们的形状与后来出现于西阿拉伯的印度数码非常相像．人们推测，在公元2世纪左右，亚历山大的数学家就直接或间接地从印度获得了印度数码，后来将其传入西阿拉伯．由于博伊西斯的手稿已散失，现在见到的原著都是后人重新刊刻的，因此不能确定这些数码的形状是否是他本人采用过的． 但他的著作对印度-阿拉伯数码的传播确实起了一定的作用．此外，博伊西斯还在书中阐述了计算所依据的10进位制的数系．该数系中的数分为三类：第一类是1—9这9个数，称之为“手指数”(digiti，意思是用手指可以表示的数)；第二类数指10的倍数，如10，20，700，850等，称为“关节数”(articuli，指手指关节可以表示的数)；第三类数是由前两类数构成的自然数，如23，857等，称为“联合数”(numeri compositi)．这是古罗马记数法的一种改良形式，由简单罗列个别数码符号向位值制记数法迈进了一步．博伊西斯除给出数字的形状描述外，还给出了数字的乘除法则．由于他的著作在中世纪广泛流传，以致于后人曾错误地认为他们使用的10进位值制数码(印度-阿拉伯数码的早期形式)及其算法是博伊西斯的发明．G．赖施(Reisch)在1503年出版的《哲学珍宝》(Margarita philosophica)一书中给出一幅插图，画的是一位算盘家和一位算法家在进行计算的情形．其中使用算子计数板的人作为毕达哥拉斯(Pythagoras)的化身，而另一位使用印度-阿拉伯数码进行笔算的人则是博伊西斯的化身． 他们被认为是其使用工具的发明者．这幅插图后来出现在许多数学史专著中．

博伊西斯在他的著作中较早地使用了大量拉丁文数学词汇，例如加、减、乘、线、面、三角形、角、分、秒、素数、比例、相等、和数等等，使古希腊的学术用语得以保存．他给出几个物体每次取两个

的组合数法则，得到 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 的结果．他还对毕达哥拉斯学派的“形数”、正星多边形等问题做了阐述．

博伊西斯在《算术入门》的引论中提出一个计划，说要为算术、音乐、几何、天文四门学科各写一本手册．他认为这些都是数学的学科，称之为“四道”（quadrivium，四条道路）．在中世纪的大学里，这四门学科被列为高级学科，统一用博伊西斯确立的名称“四道”表示．除《算术入门》和《几何学》外，他还写了一本《音乐入门》（De institutione musica），用数学语言表述音乐的一些基本原理及术语．他以数关系为标准划分出三种音乐：宇宙的音乐、人类自然音乐和某些乐器的音乐，并指出最后一种音乐才是我们唯一能听到的音乐，但只是音乐的一种．这为解答音乐是什么和将音乐作为一门科学进行研究提供了参考．博伊西斯是否写过一本天文学手册是有疑问的，目前还没有发现保存下来的文献，可能他的计划没能全部实现．

博伊西斯在逻辑学上也有建树，他创造了大量拉丁文逻辑术语，确定了属加种差的定义和发生定义，并试用了一些逻辑符号．他发展了命题逻辑，将假言命题分为简单的和复合的，提出了10个假言三段式（A 则 B，A，所以，B；A 则 B，非 B，所以，非 A，等等）．其逻辑著作对中世纪教士的训练起了支配作用．

作为古罗马学者，他的神学论著亦有一定影响．他除讨论了“三位一体”涉及的教义学说外，还对“自然”的各种含义做了详细论述，其《哲学的安慰》集中表达了他以认识神为获得至善境界，以哲学沉思为莫大安慰的思想．

近现代有关博伊西斯的研究打破了盛赞的传统，对他的论著内容、影响乃至真伪以及他个人的经历提出许多质疑，指出其知识陈旧，内容缺乏创造性等不足．不过人们还是一致肯定了他在中世纪文化中所产生的巨大影响．博伊西斯的众多著作为传播希腊罗马文化，为普及百科知识，在长达千年的历史上起了重要作用．

文　献

原始文献

[1] A. M. S. Boethius, De institutione arithmetica, De institutione musica, Geometria, G. Friedlein, ed., Leipzig, 1867.

研究文献

[2] H. M. Barrett, Boethius, some aspects of his times and works, Cambridge, 1940.

[3] H. R. Patch, The tradition of Boethius: A study of his importance in medieval culture, New York Oxford, 1935.

[4] L. Minio-Paluello, Boethius, Anicius Manlius Severinus, 见 Dictionary of Scientific biography, Vol. 2, 1973, pp. 228—236.

[5] M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, 3rd ed., 1, Leipzig, 1907, pp. 573—585.

[6] F. T. Koppen, Notiz über die Zahlwörter im Abacus des Boethius, *Bulletin de l'Académie des Sciences de St. Pétersburg*, 35(1892), pp. 31—48.

[7] L. M. De Rijk, On the chronology of Boethius's works on logic, *Vivarium*, 2(1964), pp. 1—49, 125—162.

[8] A. N. Prior, The logic of negative terms in Boethius, *Franciscan Studies*, 13 (1953), pp. 1—6

[9] M. Folkerts, Boethius Geometrie II: Ein mathematisches Lehrbuch des Mittelalters, Göttingen, 1967.

[10] L. C. Karpinski, The history of arithmetic, Rand McNally, 1925.

阿 耶 波 多

陈 一 心

（湖南科学技术出版社）

阿耶波多（Āryabhata I） 公元476年生于印度拘苏摩补罗（Kusumapura）；卒年不详。数学、天文学。

阿耶波多是迄今所知最早的印度数学家。他的出生地拘苏摩补罗距现今的巴特拉不远。巴特拉在当时叫华氏城（Pātaliputra），是一座有名的古城。释迦牟尼晚年曾行教至此。华氏城先后是孔雀王朝、笈多王朝的都城。公元5世纪初，即阿耶波多出生前近一个世纪，中国的高僧法显曾在该城的佛教寺院里从事学术活动。

阿耶波多在华氏城和拘苏摩补罗著书立说，属于拘苏摩补罗学派。他的主要著作有两本：一本是《阿耶波多历书》（Āryabhatīya），成书于公元499年，另一本天算书已经失传。《阿耶波多历书》包括"天文表集"（Daśagītikā）、"算术"（Ganitapāda）、"时间的度量"（Kālakriyāpāda）、"球"（Golapāda）等部分。该书于公元800年左右被译成拉丁文，有较大的影响。《阿耶波多历书》曾被多次评注，特别是在南印度，许多学者对该书进行过深入的研究。

阿耶波多对数学作出了多方面的贡献。其中π值、正弦表和一次不定方程的解法是他的最有代表性的成果。

在数学史上，π值即圆周率的计算占有重要的地位。在某种程度上，它反映一个国家数学发展的水平。中国魏晋时期，刘徽运用"割圆术"求得$3.14+\frac{64}{625}<\pi<3.14+\frac{169}{625}$。按照《九章算术》

方田章后面的注文，$\pi=\frac{3927}{1250}$，即3.1416．但这一注文是否为刘徽所加，尚无定论．南北朝时，祖冲之求得 $3.1415926<\pi<3.1415927$，并得出两个重要的近似值：约率 $\frac{22}{7}$，密率 $\frac{355}{113}$．约率 $\frac{22}{7}$ 早已为希腊数学家阿基米德（Archimedes）所知，他利用圆的外切与内接正96边形，曾算得 $3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$．除中国以外，关于 π 值为3.1416的记载，也见于阿耶波多的著作中．阿耶波多指出："100加4再乘8，再加62000，就得到直径是20000的圆周长近似值"．即 $\pi=\frac{104\times8+62000}{20000}=3.1416$．这个 π 值为后来的许多印度数学家所采用，婆什迦罗（Bhāskara II）更把它写成 $\frac{3927}{1250}$．它究竟是阿耶波多自己独立地用几何方法求得的，还是与中国的 $\pi=\frac{3927}{1250}$ 有某种师承关系，尚待进一步研究．

在三角学方面，阿耶波多以他制作的正弦表而闻名于世．希腊人托勒密（Ptolemy）早就制作过从0°到90°每隔半度的弦表，他把圆周分为360等份，每等份继续分为60小等份，另把半径分为60等份，对一给定圆弧，求对应弦用半径的 $\frac{1}{60}$ 为长度单位来表示的长度．印度已失传的天文学著作《苏利耶历书》（Sūrya Siddhānta）中据说也载有正弦表，阿耶波多的正弦表很可能是在此表的基础上改进而成的．在制作过程中，他大概用了几何技巧和近似运算等数学知识．阿耶波多正弦表包含从0°到90°每隔3°45′的正弦值，它比较过去希腊人的弦表，有两点明显的区别：其一，把圆周分为360等份，每份继续分为60小等份，半径 r 也同圆周一样度量．于是，从圆周长 $=360\times60=21600$ 分及圆周长 $=2\pi r$，得半径 $r=3437.746$．略去小数部分，取近似值得 $r=3438$．不再像希腊人那样，把圆周分为360份，而把半径另分为60份．阿耶波多默认曲线和直线可用同一单位度量，这无疑是一大

进步．按照这种统一的度量法，即有 $\sin 7°20' = 449$，$\sin 30° = 1719$，等等．其二，阿耶波多是计算半弦（相当于现在的正弦线）而不是全弦的长，这也是与希腊人不同的．阿耶波多称半弦为 jîva，该词原意为猎人的弓弦．阿拉伯人将它译成 dschîba．后来又误成形状相似的 dschaib，这个词的原意为胸膛、海湾或凹处．12 世纪时，它被蒂沃利（意大利中部，罗马之东）地方的柏拉图（Plato of Tivoli）意译成拉丁文 sinus，"正弦"一词即来源于此．

不定方程可以说是阿耶波多贡献最大的一个领域．他提出：如何决定一个整数 N，使 N 除以整数 a 余 r_1，除以整数 b 余 r_2，即 $N = ax + r_1 = by + r_2$，或 $by - ax = c$，其中 $c = r_1 - r_2$．通过研究这类问题，阿耶波多建立了求一次线性不定方程 $by - ax = c$（a,b,c 都是整数）的正整数通解的法则，并将此法则推广到解一次联立不定方程组．这项工作是走在当时世界前列的．阿耶波多的法则实际上就是辗转相除法．印度人称求解一次不定方程为库塔卡（Kuttaka），意思为碾细．阿耶波多开库塔卡的先河．按照他的学生婆什迦罗（Bhāskara I）等人的解释，用现代数学语言表达，对 $by - ax = c$（I），不妨设 a,b 互质．阿耶波多的解法如下：

作辗转除法，可得到一系列的商和余数：

$$q, q_1, q_2, q_3, \cdots q_m, \quad r_1, r_2, r_3, \cdots r_{m+1}.$$

其中，$a = bq + r_1$，

$$b = r_1 q_1 + r_2,$$

$$r_1 = r_2 q_2 + r_3,$$

$$r_2 = r_3 q_3 + r_4,$$

$$\cdots\cdots$$

$$r_{m-2} = r_{m-1} q_{m-1} + r_m,$$

$$r_{m-1} = r_m q_m + r_{m+1}.$$

以 $a = bq + r_1$ 代入方程（I）中，可得

$$by = (bq + r_1)x + c.$$

故 $$y = qx + y_1, \qquad by_1 = r_1 x + c. \tag{I.1}$$

将 $b=r_1q_1+r_2$ 代入 (I.1) 中,得

$$x=q_2y_1+x_1,\qquad r_1x_1=r_2y_1-c. \tag{I.2}$$

按上法运算下去,并把所得的式子排成两栏,有

(1) $y=qx+y_1$,	$by_1=r_1x+c$,	(I.1)
(2) $x=q_1y+x_1$,	$r_1x_1=r_2y_1-c$,	(I.2)
(3) $y_1=q_2x_1+y_2$,	$r_2y_2=r_3x_1+c$,	(I.3)
(4) $x_1=q_3y_2+x_2$,	$r_3x_2=r_4y_2-c$,	(I.4)
(5) $y_2=q_4x_2+y_3$,	$r_4y_3=r_5x_2+c$,	(I.5)
(6) $x_2=q_5y_3+x_3$,	$r_4x_3=r_6y_3-c$,	(I.6)
······	······	
(2n − 1) $y_{n-1}=q_{2n-2}x_{n-1}+y_n$,	$r_{2n-2}y_n=r_{2n-1}x_{n-1}+c$,	(I.2n − 1)
(2n) $x_{n-1}=q_{2n-1}y_n+x_n$,	$r_{2n-1}x_n=r_{2n}y_n-c$,	(I.2n)
(2n + 1) $y_n=q_{2n}x_n+y_{n+1}$,	$r_{2n}y_{n+1}=r_{2n+1}x_n+c$.	(I.2n + 1)

互除可以进行到 0，也可以进行到某一步为止。再分下列几种情况讨论:

(1)假定互除进行到 0，因为 a，b 互质，倒数第二个余数是 1. 若序数是偶数,则有 $r_{2n}=1$,$r_{2n+1}=0$,$q_{2n}=r_{2n-1}$. 式(I.2n) 和 (I.2n + 1) 分别为 $y_n=q_{2n}x_n+c$,$y_{n+1}=c$. 给 x_n 以任一整数值 t,可得 y_n 的一整数值. 由(2n),又得到 x_{n-1} 的值,一步步往回推，最后可得到 x，y 的整数值;若序数是奇数,则可由式 (I.2n − 1) 和 (I.2n) 等求解.

(2) 假定互除在某一步停止. 若序数是偶数,则有 $r_{2n}y_{n+1}=r_{2n+1}x_n+c$,或 $y_{n+1}=\dfrac{r_{2n+1}x_n+c}{r_{2n}}$. 给 x_n 一个适当的整数值,使 y_{n+1} 也为整数. 由 (2n + 1)，得 y_n 的整数值. 一步步往回推，可得 x,y 的整数值;若序数是奇数,则有 $r_{2n-1}x_n=r_{2n}y_n-c$,或 $x_n=\dfrac{r_{2n}y_n-c}{r_{2n-1}}$. 令 y_n 为一适当的整数，使 x_n 也为整数. 由 (2n),得 x_{n-1} 的整数值. 逆推可解出 x,y 的整数值.

显然，若 $x=\alpha, y=\beta$ 是方程 $by-ax=c$ 的最小整数解，则 $x=bm+\alpha, y=am+\beta$（m 为任意整数）也是方程的解，这就是方程的通解.

阿耶波多的法则，被他的学生婆什迦罗推广到解 $by-ax=-c$，后来的印度数学家继续研究了这类不定方程问题，得到了其他一些结果. 10 世纪中，阿耶波多 II(Aryabhata II) 进一步改进了阿耶波多的法则，并指出运算可以简化及法则可能失效的情况. 数百年来积累的这些成果，形成了印度数学中有名的库塔卡理论.

在世界古代数学史上，不定方程也受到中国、希腊等国学者的注意. 中国古代数学名著《九章算术》讨论了不定方程组问题，并指出解法："如方程，以正负术入之". 即按线性方程组来解. 古希腊学者丢番图（Diophantus）因研究不定方程很有成就，以至后人把求整系数不定方程的整数解称为解"丢番图方程". 丢番图研究的主要是高次不定方程，他解方程时只限于正根，认为负根出现则表明方程不合理. 解二次方程的时候，即使两个根都是正根，他也只取一根. 希腊学者在这方面的缺陷，被阿耶波多及后来的印度数学家弥补了.

阿耶波多还有其他许多数学成果，例如印度的字母记数法，开平方、开立方法则，等等. 他还引入了一些算术级数，它们在过去的印度典籍中没有发现过. 但是，他关于求圆面积的公式显然取自早期的印度天算著作. 对于半径为 r 的球的体积，阿耶波多误为 $\pi r^2\sqrt{\pi r^2}$，三棱锥的体积则误为底三角形的面积×高× $\frac{1}{2}$.

《阿耶波多历书》是印度第一部重要天算著作. 在书中，阿耶波多运用他提出的数学方法，计算了黄道、白道的升交点和降交点的运动，讨论了日月五星的最迟点及其迟速运动，推算了日月食的发生时间，并像中国人那样去推算上元积年. 他还提出过地球自转的先进思想，可惜未被后来的天文学家所承认.

阿耶波多在印度科学史上是有重要影响的人物，1975 年 4 月 19 日印度发射的第一颗人造卫星名为阿耶波多号，就是为了纪念

他的。

文　　献

原始文献

[1] Āryabhaṭa I, Āryabhaṭiya, Leiden 1874.

研究文献

[2] B. Datta and A. N. Singh, History of Hindu mathematics, Asia Publishing House Bombay, 1938.

[3] H. Kern, On some fragments of Āryabhaṭa, *Journal of the Royal Asiatic Society*, **20**(1863), pp. 371—387.

[4] Bhāu Dāji, Brief notes on the age and authenticity of the works of Āryabhaṭa Varāhamihira, Brahmagupta, Bhaṭṭotpala, and Bhāskarāchārya, *Journal of the Royal Asiatic Society*, 1865, pp. 392—418.

[5] L. Rodet, Sur la véritable signification de la notation numérique inventée par Āryabhaṭa, *Journal Asiatique*, Ser. 7, **16**(1880), pp. 440—485.

[6] G. R. Kaye, Two Āryabhaṭas, *Bibliotheca Mathtematica*, 10(1910) pp. 289—292.

[7] J. F. Fleet, Āryabhaṭa's System of expressing numbers, *Journal of the Royal Asiatic Society*, 1911, pp. 109—126.

[8] N. K. Mazumdar, Āryyabhatta's rule in relation to indeterminate equations of the first degree, *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*, **3**(1911—1912), pp. 11—19.

[9] R. Sewell, The first Arya Siddhanta, *Epigraphia Indica*, **16**(1921—1922), pp. 100—144, **17**(1923—1924), pp. 17—104.

[10] A. A. Krishnaswami Ayyangar, The mathematics of Āryabhaṭa, *Quarterly Journal of the Mythic Society*, 16(1926), pp. 158—179.

[11] А. И Володарский, Очерки истории средневековой индийской Математики, Издательство «Наука», Москва, 1977.

[12] W. E. Clark, The Āryabhaṭiya of Āryabhaṭa, The University of Chicago Press, 1930.

瓦拉哈米希拉

孙 康

（辽宁师范大学）

瓦拉哈米希拉（Varāhamihira） 生于印度乌贾因(Ujjain）附近，生年不详；约公元587年卒．天文学、占星术．

Varāhamihira 曾译为“彘日”，因为 Varāha 在梵文里是“猪”的意思．瓦拉哈米希拉的父亲阿迪蒂亚达萨（Ādityadāsa）姓“马加婆罗门”（Maga Brāhmaṇa,印度最高贵的种姓），祖先属伊朗的琐罗亚斯德教（Zoroastrian,也叫做拜火教，祆教），公元前后移居到印度北部．瓦拉哈米希拉居住在乌贾因附近的加比特格（Kāpitthaka）村，大约就是现在的克亚特（Kayatha）废墟．他的主要工作是改编五种历算书，完成《五大历算全书汇编》（Pañcasiddhāntikā,公元 505年）．婆罗摩笈多（Brahmagupta）著《婆罗摩修正体系》（Brāhmasphuṭasiddhānta,公元 628年）时曾参考瓦拉哈米希拉的工作．

瓦拉哈米希拉一生写了大量的著作，这些著作覆盖了印度当时所有的天文学和占星学领域．瓦拉哈米希拉生活的时代正值西罗马帝国灭亡，中世纪开始；也是希腊数学衰亡，印度数学兴起的时代．他的著作中创新不多，但保存了大量前人的成果．

在生辰星位学（genethlialogy,计算某人诞生时星体位置）方面，瓦拉哈米希拉主要以印度化的希腊体系为依据．在占卜学方面，则是依靠一些美索不达米亚资料．在天文学方面，主要依靠具有代表性的三种传统，即受美索不达米亚影响的1世纪时的印度

天文学，希腊-罗马有关太阳、月亮及行星理论的印度译本，以及一些印度文献中所包含的希腊天文学.

瓦拉哈米西拉的手稿至少有6部保存下来. 7世纪以前，中国的纸张还没有传到印度，印度人用一种树叶——贝多罗叶来书写，很难保存. 因此，这些手稿便成为研究公元500年以前印度文化的珍贵资料. 由于印度文化受希腊的影响很深，而对托勒密(Ptolemy)以前的希腊天文学，我们知之甚微，所以这些手稿对于研究古希腊天文学也很有价值.

关于瓦拉哈米希拉编写的《五大历算全书汇编》，存在一些不同观点. C. N. 斯林尼瓦西格(Srinivasiengar)认为瓦拉哈米希拉于公元505年编写了《五大历算全书汇编》.D.平格里(Pingree)认为该书是拉德(Lāṭa 或 Lāṭadeva,公元505年)的《五大历算全书汇编》的改编本. P C. 森格普塔(Sengupta)则认为拉德编写的是另外两本历算书——《罗默格历算书》(Romaka Siddhānta)和《保利瑟历算书》(Paulisā Siddhānta)[1]. 从现有资料看，瓦拉哈米希拉编写《五大历算全书汇编》时，有5种历算书流行于印度，它们是上面提到的拉德编写的两本及《沃西什特历算书》(Vasiṣṭha Siddhānta)、《绍勒历算书》[Saura Siddhānta，即《太阳的知识》(Sūrya Siddhānta)]、和《拜德默赫历算书》(Paitāmaha Siddhānta). 瓦拉哈米希拉便是以这五种历算书为蓝本，编写了《五大历算全书汇编》的.

这5种历算书中最重要的一本是《太阳的知识》(Sūrya Siddhānta)，Sūrya 是印度婆罗门教(Brahmanism)里的太阳神，Siddhānta 是印度宗教因明学用语，在这里译为知识. 书中主要讲历法，是印度最古老的天文学著作之一.

《太阳的知识》包含了印度三角学的精华，它最早引入了正弦的概念，主要内容可用现代符号(以半径 r 为单位)表示如下:

---

1) E. Burgess, Sûrya-Siddhânta, Calcutta University, 1935, p. viii.

$$(1)\ \pi = \sqrt{10};\quad (2)\ \sin 30° = \frac{1}{2}, \sin 60° = \sqrt{1-\frac{1}{4}};$$

$$(3)\ \sin^2 r = \left(\frac{\sin 2r}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\sin(90-2r)}{2}\right)^2.$$

书中给出一张以 3°45′ 为间隔的有 24 个格的正弦函数表，这是世界上最早的正弦表。

比例律也是《五大历算全书汇编》中的重要内容，印度人发明了一种简便的法则，即使是“无知”的人也可用来解决各种比例问题. 瓦拉哈米希拉写道：“如果太阳在一年里转一圈,那么在给定的天数里，它能转多少圈呢？即使一个无知的人用笔简单地算一下也能算出来.”

书中对零有多处论述. 从这些论述中可以看出，当时已经将 0 看成与 1,2,3 这些数字具有同等地位的数. 零号是印度人的卓越发明，是位值制记数法的基础. 与瓦拉哈米希拉同时代的加尼（Jinabhadra Gani） 的著作中，不仅将 0 看成是空无一物及一个特殊的数字符号，而且具有了位值制思想的萌芽. 他将

224 400 000 000

表示成二十二,四十四,八个零.

《五大历算全书汇编》还阐述了太阳、月亮及行星理论;时间及地球纬度;天文仪器;宇宙论等诸多问题.

瓦拉哈米希拉对岁差很重视. 他将修订《太阳的知识》以来的岁差累积起来，然后修订了一部新的历法. 他告诫后人，历法随着岁差的积累会出现偏差，必须定期修订. 这一忠告没有引起人们的重视,直到 1967 年印度政府准备建立一部国际历法时才被采纳.

瓦拉哈米希拉有三部关于占卜学方面的著作. 其中的《布勒德瑟默达》是现存最完整的关于占卜学的梵文著作之一,是一部有关印度地理及社会的有价值的文献.

瓦拉哈米希拉关于生辰星位学的代表作是《布勒贾特格》. 此书经常被注释及翻译. 其中由乌德珀勒（Utpala,公元 966年）所

给出的注释最好，于 1864 年在孟买发表。

在占星学方面，瓦拉哈米希拉曾写过四本书，其中三本是关于军事的，另外一本是关于婚姻的。

文　　献

原始文献

[1] O. Neugebauer and D. Pingree, Pañcasiddhāntikā, Copenhagen, 1970—1971.

[2] S. Dvivedin, Bṛhatsaṃhitā, Benares, 1895—1897; repr Benares,1968.

[3] A. M. Shastri, Contribution towards the reconstruction of the Samāsa-Saṃhitā of Varāhamihira, *Bhāratīya Vidyā*, **23**(1963), pp. 22—39.

[4] P. V Kane The Vaṭakaṇikā of Varahamihira *Vishveshvaranand Indological Journal*, **1**(1963), pp. 63—65.

[5] H. Kern, Die Yogayātrā des Varāhamihira, *Indische Studien*,**10**(1868), pp 161—212; **14**(1876), pp. 312—358; **15**(1878), pp. 167—184.

研究文献

[6] C. N Srinivasiengar The history of ancient Indian mathematics. India 1967

[7] G. R. Kaye ndian mathematics, Calcutta and Simla, 1915.

[8] A. K. Bag, Mathematics in ancient and medieval india, 1979.

婆罗摩笈多

陈 一 心

（湖南科学技术出版社）

婆罗摩笈多(Brahmagupta) 约公元598年生，约660年卒．数学、天文学．

婆罗摩笈多是印度印多尔北部乌贾因地方人，原籍可能为现在巴基斯坦的信德．从他的姓名结构中含 gupta 推测，他属于吠舍氏的成员，即当时的平民阶层．婆罗摩笈多长期在乌贾因工作，这里是当时印度数学、天文学活动的三个中心之一．

婆罗摩笈多在30岁左右，编著了《婆罗摩修正体系》(Brāhmasphuṭasiddhānta，公元628年)一书．该书用此名，是因为他修改和引用了印度最古老的天文学著作《婆罗摩体系》(Brāhmasiddhānta)的内容．《婆罗摩修正体系》分为24章，其中《算术讲义》(Gaṇitād'hāya)和《不定方程讲义》(Kuṭakhādyaka)两章是专论数学的，前者研究三角形、四边形、零和负数的算术运算规则、二次方程等；后者研究一阶和二阶不定方程．《婆罗摩修正体系》的其他各章是关于天文学研究的，也涉及到许多数学知识．

婆罗摩笈多的另一部著作《肯达克迪迦》(Khaṇḍakhādyaka，音译)，是天文学方面的名著．它包含8章，研究了行星的黄经，与周日运动有关的三个问题，月食、日食、星的偕日升落，以及行星的会合等．

婆罗摩笈多的这些著作在拉贾斯坦邦、古吉拉特邦、中央邦、北方邦、比哈尔、尼泊尔、潘賈婆(Panjab)和克什米尔等地受到广泛重视，许多学者对其进行过研究．

婆罗摩笈多的一些数学成就在世界数学史上有较高的地位，他提出了负数概念，用小点或小圈记在数字上面以表示负数，并给出负数的运算法则，如“两个正数之和为正数，两个负数之和为负数，一个正数和一个负数之和等于它们的差”；“一个正数与一个负数的乘积为负数，两个负数的乘积为正数，两个正数的乘积为正数”等等。他的负数概念及其加减法法则，仅晚于中国（约公元1世纪成书的中国《九章算术》最早提出负数及其加减法运算的概念）而早于世界其他各国数学界；而他的负数乘除法法则，在全世界都是领先的。

婆罗摩笈多对数学的最突出贡献是解不定方程 $Nx^2+1=y^2$。在欧洲，这种方程曾在 J. 佩尔（Pell）的代数书中论及，后被 L. 欧拉（Euler）命名为佩尔方程。1767 年，J.L. 拉格朗日（Lagrange）运用连分数理论，给出了该问题的完全的解答．事实上，婆罗摩笈多在公元 628 年便几乎完全解出了这种方程，只是当时不为欧洲人所知。其后，婆罗摩笈多的解法又被婆什迦罗（Bhāskara）改进。

按照婆罗摩笈多的解法，令 (α,β) 和 (α',β') 分别为 $Nx^2+K=y^2$ 和 $Nx^2+K'=y^2$ 的一个解集，于是很容易变换为 $Nx^2+KK'=y^2$ 的解 $x=\alpha\beta'\pm\alpha'\beta$，$y=\beta\beta'\pm N\alpha\alpha'$，这被称为婆罗摩笈多引理。特别地，取 $K=K'$，若 $N\alpha^2+K=\beta^2$，则有 $x=2\alpha\beta$，$y=\beta^2+N\alpha^2$ 为 $Nx^2+K^2=y^2$ 的解，故有

$$N\left(\frac{2\alpha\beta}{K}\right)^2+1=\left(\frac{\beta^2+N\alpha^2}{K}\right)^2.$$

因此，$x=\frac{2\alpha\beta}{K}$，$y=\frac{\beta^2+N\alpha^2}{K}$ 为方程 $Nx^2+1=y^2$ 的解．若上述值为整数，便得到一整数解集：

(1) 若 $K=\pm1$，则上述值显然为整数。

(2) 若 $K=\pm2$，则有 $x=\alpha\beta$（取正号），$y=\frac{1}{2}(\beta^2+\beta^2-2)=\beta^2-1$。$x$ 和 y 为整数。

(3) 若 $K=4$，则 $x=\frac{1}{2}\alpha\beta$，$y=\frac{1}{2}(\beta^2-2)$。 若 α 为偶数，则由 $N\alpha^2+4=\beta^2$，β 也为偶数。故此为方程的一对整数解。若 α 为奇数，应用婆罗摩笈多引理，可得

$$x=\frac{1}{2}\alpha(\beta^2-1),\quad y=\frac{1}{2}\beta(\beta^2-3).$$

若 β 为奇数，则 x，y 皆为整数；若 β 为偶数，x,y 也是整数。

(4) 若 $K=-4$，依上述过程

$$N\left(\frac{1}{2}\alpha\beta\right)^2+1=\left\{\frac{1}{2}(\beta^2+2)\right\}^2.$$

反复运用婆罗摩笈多引理，可得

$$x=\frac{1}{2}\alpha\beta(\beta^2+1)(\beta^2+3),$$

$$y=(\beta^2+2)\left\{\frac{1}{2}(\beta^2+1)(\beta^2+3)-1\right\}.$$

无论 β 是奇数还是偶数，以上解都是整数。

总之，解 $Nx^2+1=y^2$，若得到一组解 (α,β)（$K=\pm1$，±2 或 ±4），反复运用婆罗摩笈多引理，便可得到一无穷解组。这就是婆罗摩笈多解方程 $Nx^2+1=y^2$ 的方法。

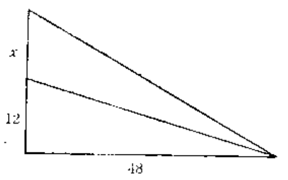
婆罗摩笈多还研究了不定方程 $ax\pm by=c$，这类方程在印度首先为阿耶波多（Āryabhaṭa I）所研究，并得到解答，婆罗摩笈多将其推广到联立不定方程及多个未知量的情形。

对方程 $ax^2+bx=c$ （$a>0$，b 和 c 可以是负数），婆罗摩笈多给出一个根的公式

$$x=\frac{\sqrt{ac+\left(\frac{b}{2}\right)^2}-\frac{b}{2}}{a}.$$

《婆罗摩修正体系》中的许多代数问题都是属于天文学计算的，印度书中常见的离奇古怪的题目并不多，后来的注释者补上一些以说明某种法则。如：山上住着两个苦行者，一个是巫师，会在空中飞行。他从山顶笔直跳到空中去，到达某一高度后，斜降到一

个小镇上．另一个从山顶垂直到达地面，再步行到同一小镇．二人所经距离相等，求山和小镇的距离，以及巫师升空的高度．



这是一个二次不定方程，注释者按图中的数字求得 $x = 8$。

在几何学方面，婆罗摩笈多对有理直角三角形即边为有理数的直角三角形很有兴趣．他给出了一般解 $a = 2mn$，$b = m^2 - n^2$，$c = m^2 + n^2$（m, n 是任意不相等的有理数），但没有证明。

婆罗摩笈多对有理四边形的研究也取得了许多成果，不过，他没有认识到他所得到的结论仅适用于圆内接四边形。令 (a, b, c) 和 (α, β, γ) 分别是两个有理直角三角形的边，并有关系 $c^2 = a^2 + b^2$ 和 $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$，则边为 $(c\beta, \alpha\gamma, c\alpha, b\gamma)$ 和 $(c\beta, c\alpha, b\gamma, \alpha\gamma)$ 的两个四边形称为婆罗摩笈多四边形．例如，取 (a, b, c) 和 (α, β, γ) 分别为(3,4,5)和(5,12,13)，便得到边为(25,39,60,52)和(25,60,39,52)的婆罗摩笈多四边形．圆内接四边形的两个定理被称为婆罗摩笈多定理：(1)边为 a, b, c, d 的圆内接四边形的面积为 $\sqrt{(S-a)(S-b)(S-c)(S-d)}$，其中 $2S = a + b + c + d$。(2) 边为 a, b, c, d 的圆内接四边形的对角线长分别为

$$\sqrt{\left(\frac{bc + ad}{ab + cd}\right)(ac + bd)}$$

和

$$\sqrt{\left(\frac{ab + cd}{bc + ad}\right)(ac + bd)}.$$

婆罗摩笈多还探讨了借助于一给定的正弦表求中间角正弦的方法．他所使用的插值法则等价于牛顿-斯特灵公式．

婆罗摩笈多的一些数学结论夹杂着错误，例如计算边长为 12 的等边三角形的面积，他写为 6×12；边长为 10,13,13 的等腰三

角形的面积写为 5×13；边长为 13，14，15 的三角形面积写为 $7 \times \frac{1}{2} \times (13+15)$，等等。这表明他没有正确掌握求三角形面积的公式。关于 $0 \div 0$，他认为商是 0，这也是不正确的。

公元 8 世纪时，婆罗摩笈多的著作被带到巴格达，在皇室的支持下译成阿拉伯文，对当时阿拉伯的天文学和数学产生了一定影响。印度的一些天文表被阿拉伯人称为辛德罕德（Sindhind），从发音上推测它们很可能取自婆罗摩笈多的《婆罗摩修正体系》，这些天文表在阿拉伯世界享有极高的声誉。

文　献

原始文献

[1] Brahmagupta, Brāhmasphuṭasiddhānta, edited with explanatory notes by Sudhakara Dvivedi, Benares, 1902.

[2] Brahmagupta, Khaṇḍakhādyaka, edited with the commentary of Amarāja (约1250) by Babua Miśra, Calcutta, 1925; English translation with notes and comments by Prabodh Chandra Sengupta, Calcutta, 1934.

研究文献

[3] B. Datta and A. N. Singh, History of Hindu mathematics, Asia Publishing House, Bombay, 1938.

[4] А.П. Юшкевич, История математики в средние века, Москва, 1961.

[5] David Pingree, Brahmagupta. 见 Dictionary of scientific biography, Vol. 2, 1973, pp. 416—418.

[6] David Pingree, A census of the exact sciences in Sanskrit, Philadelphia, 1969.

[7] Ś. B. Dīkṣita, Bhāratīya jyotiḥśāstra, Poona, 1931, pp. 216—227.

[8] Sudhākara Dvivedin, Gaṇakataraṅgiṇī, Benares, 1933.

[9] P. C. Sengupta, Brahmagupta on interpolation, *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*, 23(1931), pp. 125—128.

[10] M. Simon, Zu Brahmagupta diophantischen Gleichungen Zweiten Grades, *Archiv der Mathematik und Physik*, 20(1913), pp. 280—281.

[11] H. Weissenborn, Das Trapez bei Euclid, Heron und Brahmagupta, *Abhandlungen Zur Geschichte der Mathematik*, 12(1879), pp. 167—184.

花 拉 子 米

杜 瑞 芝
(大连理工大学)

花拉子米 (al-Khwārizmi, Abū Ja'far Muḥammad Ibn Mūsā) 约公元783年生；约公元850年卒．数学、天文学、地理学．

阿布·贾法尔·穆罕默德·伊本·穆萨·阿尔-花拉子米的传记材料，很少流传下来．一般认为他生于花拉子模[Khwarizm，位于阿姆河下游，今乌兹别克境内的希瓦城 (Хива) 附近]，故以花拉子米为姓．另一说他生于巴格达附近的库特鲁伯利 (Quṭrubbullī)．祖先是花拉子模人．花拉子米是拜火教徒的后裔，早年在家乡接受初等教育，后到中亚细亚古城默夫 (Мерв) 继续深造，并到过阿富汗、印度等地游学，不久成为远近闻名的科学家．东部地区的总督马蒙(al-Ma'mūn，公元 786—833年) 曾在默夫召见过花拉子米．公元813年，马蒙成为阿拔斯王朝的哈利发后，聘请花拉子米到首都巴格达工作．公元830年，马蒙在巴格达创办了著名的"智慧馆" (Bayt al-Hikmah，是自公元前3世纪亚历山大博物馆之后最重要的学术机关)，花拉子米是智慧馆学术工作的主要领导人之一．马蒙去世后，花拉子米在后继的哈利发统治下仍留在巴格达工作，直至去世．花拉子米生活和工作的时期，是阿拉伯帝国的政治局势日渐安定、经济发展、文化生活繁荣昌盛的时期．

花拉子米科学研究的范围十分广泛，包括数学、天文学、历史学和地理学等领域．他撰写了许多重要的科学著作．

在数学方面，花拉子米编著了两部传世之作：《代数学》和《印度的计算术》。

代数学的内容和方法是自古以来逐渐形成的。早在古埃及阿默士的纸草书中就已经出现属于一元一次方程的问题。巴比伦人也知道某些二次方程的解法。在汉穆拉比时代的泥板中已有二次方程的问题，从中可以看出从算术到代数的过渡。代数学在希腊时代得到重大发展，其代表人物是丢番图（Diophantus）。他的著作《算术》（Arithmetica）中的大部分内容可划入代数的范围。书中出现了符号的运算法则和用字母表示的未知数，解决了某些二次方程、特殊的三次方程和大量的不定方程问题。公元7—8世纪，印度数学获得了可观的发展。印度数学家婆罗摩笈多（Brahmagupta）给出了二次方程的一个求根公式。二次方程的一般解法是花拉子米在他的《代数学》中首先给出的。

《代数学》大约写于公元820年，有多种版本流传下来，比较重要的有两种：一种是抄录于1342年的阿拉伯文手稿，现存牛津大学图书馆，1831年由F. 罗森(Rosen) 译成英文，在伦敦出版了它的阿-英对照本；另一种是 L. Ch. 卡平斯基（Karpinski）根据著名翻译家切斯特的罗伯特 （Robert of Chester）1145 年翻译的《代数学》拉丁文译本编译的。

《代数学》的阿拉伯文书名是 'ilm al-jabr wa'l muqabalah，直译应为《还原与对消的科学》。al-jabr 意为“还原”，这里指把负项移到方程另一端“还原”为正项；muqabalah 意即“对消”或“化简”，指方程两端可以消去相同的项或合并同类项。一般认为拉丁文中代数学一词 algebra 是由 al-jabr 演变而来。

在《代数学》中，花拉子米用十分简单的例题讲述了解一次和二次方程的一般方法。他的作法实质上已经把代数学作为一门关于解方程的科学来研究，只是其研究形式与现代的不同。该书包括三部分：第一部分讲述现代意义下的初等代数，第二部分列举各种实用算术问题，最后一部分是关于续承遗产的应用问题。

在第一部分里，作者系统地讨论了一、二次方程的解法。他给

出六种类型的标准方程，这些方程由三种量组成：(1)根（jadhr，指植物的根或事物的根本)或一堆“东西”（Shay'）；(2)根自乘的结果，即根的平方（māl，也表示财产或货币的和）；(3)简单数或称“迪拉姆”（dirham，阿拉伯货币单位）．现在把解方程求未知量叫做求根就是来源于此．花拉子米完全用文字来表述，书中没有出现任何字母和缩写符号．为了明确起见，下面用现代符号来表示花拉子米论述的六种类型方程：

(1) “平方”等于“根” $ax^2 = bx$.

(2) “平方”等于“数” $ax^2 = c$.

(3) “根”等于“数” $bx = c$.

(4) “平方”和“根”等于“数” $ax^2 + bx = c$.

(5) “平方”和“数”等于“根” $ax^2 + c = bx$.

(6) “根”和“数”等于“平方” $bx + c = ax^2$.

以上 a,b,c 都是正数．对于每种类型的方程的解法，花拉子米都给出具体例子．例如对于第四种类型的方程，花拉子米的例题是“一个平方数及其根的10倍等于39个迪拉姆”．他把求解过程叙述为：“取根的数目的一半，在这里就是5，将它自乘得25，把它同39相加得64，开方等于8，再减去根数的一半，即5，等于3．这就是根．”下面用现代符号表示该方程及求解过程：

$$x^2 + 10x = 39,\ 10 \times \frac{1}{2} = 5,\ 5^2 = 25,$$

$$25 + 39 = 64,\ \sqrt{64} = 8,\ 8 - 5 = 3,\ x = 3,\ x^2 = 9.$$

即

$$x = \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 + 39} - \frac{10}{2}.$$

这种解法相当于给出方程 $x^2 + px = q$ 的一个求根公式

$$x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2}.$$

花拉子米放弃了负根．

在解第五种类型的方程 $x^2+21=10x$ 时，花拉子米求出了两个根，相当于

$$x=\frac{10}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2-21}=7,3.$$

在数学史上，他是最早认识到二次方程有两个根的数学家。 在这方面，花拉子米比希腊人和印度人有明显的进步。他还特别指出，当根的数目之半自乘的结果小于自由项时，开平方是不可能的，此时方程无根。这相当于指出我们现在称之为判别式的必须非负的条件。

在论述了六种典型方程的解法之后，花拉子米又用几何方法给出它们的证明。这些证明无疑受到希腊几何学的影响，有的似乎是欧几里得《几何原本》中有关命题的翻版。

例如，对于方程 $x^2+10x=39$ 的根的正确性，花拉子米给出了两种不同的几何证明。第一种证法是在边长为 x 的正方形的四个边上向外作边长为 x 和 $\frac{10}{4}$ 的矩形，再把这个图形补充成边长为 $x+5$ 的正方形(图 1)。 大正方形的面积等于 $x^2+10x+25$，即 64(因为由已知方程知 $x^2+10x=39$)，因此其边长为 8. x 是较小正方形的边，等于 $8-2\times\frac{10}{4}$，即 3。第二种证法是在边长为 x 的正方形的两个相邻边上作边长为 x 和 5 的矩形，然后把图形补充为完整的大正方形(图 2)。

图 1

图 2

在几何证明之后，花拉子米建立了两种变换——“还原”与“对消”．他指出，经过这两种变换，一般形式的一次和二次方程就能化成已经讨论过的六种标准方程．当然，这些变换都是用文字叙述的． 花拉子米以问题“把 10 分为两部分，使其平方之和等于 58”为例来说明这两种变换．这个问题相当于方程

$$x^2 + (10 - x)^2 = 58 \tag{1}$$

或

$$2x^2 + 100 - 20x = 58. \tag{2}$$

接下去作者指出：“100 和两个平方减去 20 个根，即 100 和两个平方等于 58 和 20 个根”这段话的意思是，方程(2)左端的“$-20x$”移到方程右端，应变为“$+20x$”．花拉子米称这种变换为 al-jabr (即“还原”)．这样一来，方程(2)变成

$$2x^2 + 100 = 58 + 20x, \tag{3}$$

即

$$x^2 + 50 = 29 + 10x. \tag{4}$$

花拉子米又对方程(4)施行“对消”变换——“从 50 中减去 29，则平方和 21 等于10个根”，于是(4)化为 $x^2 + 21 = 10x$，属于第五种类型方程．花拉子米称后一种变换为 muqabalah(即“对消”)．

“还原”与“对消”是花拉子米提出的解方程的基本变形法则．从此以后，解方程的概念逐步明朗起来．这两种变形法则被长期沿用下来，成为现在的移项与合并同类项．

在花拉子米所列举的各种实际问题中，还出现了相当于现代二元二次方程(或分式方程)组的情形．如用现代符号表示，他的问题中的第一个条件相当于方程 $x + y = 10$，而依据第二个条件可分别列出下列方程：

$$x \cdot y = 21,$$

$$x^2 - y^2 = 40,$$

$$x^2 + y^2 + (x - y) = 54,$$

$$\frac{y}{x} + \frac{x}{y} = 2\frac{1}{6}, \text{等等．}$$

不过，他并没有明确地给出第二个未知量，而是用“一个东西”和“10 减去一个东西”来代替。事实上，上述方程组都很容易化为一元二次方程。

《代数学》中还用大量例子阐明代数式的运算法则，如单项式乘二项式，两个二项式相乘，同类根式的乘除法，等等。

关于花拉子米撰写《代数学》一书所受的学术影响以及资料来源等问题，至今尚未搞清。首先，花拉子米似乎没有受印度代数的影响。印度数学家并未给出方程的根的几何论证。他们解二次方程也没有区分出第四、五、六种类型。花拉子米之所以把一次、二次方程分为六种类型，让其系数 a,b,c 总是正数，是为了避免单独出现负数或减数大于被减数的情形。他认识到二次方程有两个根，但只取正根。对于负根和零根，一概摒弃。此外，《代数学》中完全用文字叙述，没有出现符号。在对负数的认识和使用符号等方面，花拉子米比印度数学家有明显的退步。花拉子米关于二次方程的根的几何论证法似乎受到希腊几何学的影响，但是他的论证方法又在本质上区别于欧几里得（Euclid）《几何原本》中的代数几何学。花拉子米引入后三种典型方程的许多问题与丢番图《算术》中的问题相似，例如形如

$$\begin{cases} x+y=a \\ xy=b \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x+y=a \\ x^2+y^2=b \end{cases}$$

的问题。但是他们解决问题的途径不同。事实上，丢番图著作的第一批阿拉伯文译本是在花拉子米去世后才出现的，因此花拉子米很难受到丢番图的影响。科学史家推测[1]，花拉子米可能通晓中东、近东、巴比伦以及古希腊罗马的科学遗产，在此基础上写出了独具风格的代数著作。至于 al-jabr 一词，可能来源于亚述语中的有关术语，而后者又源于古巴比伦语中的表示两件东西相等的词语。

《代数学》在 12 世纪传入欧洲，之后的几个世纪，它成为欧洲

1) S. Gandz The sources of al-Khowārismis algebra, Osiris, Vol. 1, 1936 pp.263—277.

人的标准课本，其内容、思想和方法相当广泛地影响过历代数学家。在中世纪最著名的数学家 L. 斐波那契（Fibonacci）的《算盘书》(1202)中，就有一章名为“aljabra et almuchabala”，其中许多问题出自花拉子米的《代数学》。15 世纪著名数学家 L. 帕乔利（Pacioli）写了一本《算术、几何、比和比例集成》(1494)，其中广泛地讨论了一次和二次方程，作者沿用了花拉子米的解法和几何证明。事实上，在中世纪和文艺复兴时期，凡是在代数学方面有过贡献的欧洲学者，他们的工作在不同程度上都受到花拉子米的影响。《代数学》以其逻辑严密、系统性强、通俗易懂和联系实际等特点被奉为代数教科书的鼻祖。

花拉子米的算术著作，只有一种译本流传下来，就是 14 世纪中叶翻译的拉丁文译本手稿，现存剑桥大学图书馆，1857 年由意大利数学史家 B. 邦孔帕尼（Boncompagni）在罗马出版，书名为：“Trattati d'Aritmetica publicati da Baldassare Boncompagni, I. Algoritmi de numero indorum”。以后，这部著作的拉丁文译本就定名为“Algoritmi de numero indorum”。其中 Algoritmi 本是花拉子米的拉丁文译名，可是被人理解为印度的读数法，后来它竟演变成表示任何系统或计算系列的“算法”的专业术语。这份手稿由于反复传抄，其中有多处译文不准确，还出现一些空白。现代科学史家根据其他一些有关著作[1] 进行了认真的比较研究，恢复了它的本来面貌。我们把这部著作的名称译为《印度的计算术》。

该书是一部专门讲述印度数码及其计算法的著作。作者首先讲述了印度人使用 9 个数码和零号记数的方法。这种方法体现了十进位值制记数原理，任何一个整数都能很简单地表示出来并进

1) 主要有两部著作：一部是 12 世纪学者希斯帕伦西斯(Johannes Hispalensis)所著“Liber algorismi de practica arismetrice”，另一部是“Liber ysagogarum alchorismi in artem astronomicam a magistro A. Compositum”，作者可能是 12 世纪英国学者阿德拉德（Adelard of Bath）

行计算．作者还给出四则运算的定义和法则．例如乘法定义为重复相加，除法定义为重复相减．具体地说，两数相乘，就是把其中一个数按另一个数的大小增加倍数，其结果为乘积；两数相除，就是把其中较大的数按较小的数的大小分成若干部分，用较大的数减较小的数，能减去多少个，商就是多少．花拉子米特别提出倍乘法和倍除法，即乘以 2 和除以 2 的运算．古埃及人是很重视这两种运算的．花拉子米强调它们是为了帮助学生记忆开平方的法则．花拉子米在该书中给出的开平方的方法，用现代符号表示，相当于下列近似公式：

$$\sqrt{N} = \frac{1}{10^k}\sqrt{N \cdot 10^{2k}}$$

计算结果中的分数部分表示为 60 进位分数．

书中还专门讲述了分数理论．花拉子米把分数分为"能读的"和"不能读的"两种．前者指 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，…，$\frac{1}{10}$，在阿拉伯语中有相应的单词与之对应，其词根来源于相应的整数的词根 $\left(\frac{1}{2}\right.$ 除外$\left.\right)$；其他分数称为"不能读的"，在阿拉伯语中用两个以上的复合词来表示． 分数的表示法与中国古代用算筹表示分数的方法大体相同．例如 $3\frac{1}{2}$ 和 $8\frac{3}{11}$ 表示为（用现代阿拉伯数码）：

$$\begin{array}{cc} 3 & 8 \\ 1 & 3 \\ 2 & 11 \end{array}$$

分子在上，分母在下，带分数的整数部分又在分数部分之上．中国科学史家推测，这种表示法可能是由中国经印度传入阿拉伯世界的．

花拉子米在这部著作中列表给出分数乘法的例子：

$$8\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{5} \times 3\frac{1}{3}\frac{1}{9}$$

即

$$\left(8+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\times\left(3+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)$$

8		3
1		1
2		3
1		1
4		9
1		
5		
40		27
	1080	
358		93
	33294	
	30	
	894	
	1080	

从这个计算表格可以看出,计算步骤是先通分:

$$8\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{5}=\frac{358}{40},\quad 3\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{9}=\frac{93}{27};$$

然后相乘:

$$\frac{358}{40}\times\frac{93}{27}=\frac{33294}{1080},$$

最后写成标准形式 $30\,\frac{894}{1080}$. 在计算过程中,分子和分母的位置颠倒,通分母时没有取最小公倍数. 这个例子表明,花拉子米时代的阿拉伯学者掌握把一般分数化为单分子分数的方法.

《印度的计算术》一书有着特殊的历史作用, 它是第一部用阿拉伯文撰写的在伊斯兰国家介绍印度数码和记数法的著作. 它的问世对十进位值制记数法在中东、近东和欧洲各国的传播和普及

起到了决定作用．阿拉伯人最初只有数词，没有数码字，在征服埃及、叙利亚等地之后，他们开始使用希腊字母记数法．公元773年(另一说771年)，印度学者把他们著名的悉檀多(即历数书)带人阿拔斯王朝阿尔曼苏的宫庭中．印度的数码字和记数法从此传人伊斯兰世界．花拉子米的《印度的计算术》极大地推动了印度数码和记数法在阿拉伯国家的传播．12世纪时，这部著作传人欧洲各国，对欧洲数学的发展也产生了显著的影响．印度数码逐渐代替了希腊字母记数系统和罗马数字等，最终成为世界通用的数码字．在12—13世纪，出现了一批直接受《印度的计算术》影响而编写的算术书：在意大利，有L. 斐波那契（Fibonacci）的《算盘书》(Liber Abaci)；在英国，有J. de 萨克罗博斯科（Sacrobosco）的《算法书》（Algorismus）；在法国，有A. de 维尔迪厄(Villedieu)的《算法歌》（Carmen de algorismi）；在德国，有N. de 约丹努斯（Jordanus）的《算法论证》（Algorismus Demonstratus）等．这些著作又从拉丁文译成多种文字，通行了几个世纪，对印度数码和记数法引进欧洲起到重要作用．

花拉子米对几何学也有一定贡献．在他的《代数学》中，有一章名为"测量篇"，专门讲述图形和物体的测量．关于平面图形，他主要研究了三角形、四边形和圆．他对三角形和四边形进行分类，建立了相应的测量公式．他使用的圆面积近似公式为

$$S = d^2 - \frac{1}{7}d^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}d^2,$$

此处 d 为圆的直径．该公式相当于取圆周率 π 等于 $3\frac{1}{7}$，而 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}$ 即 $\frac{1}{14}$，这里保持了阿拉伯人对分数的特殊表示法．他还使用过圆周率的另两个值：$\sqrt{10}$ 和 $\frac{62832}{20000}$．此外，花拉子米还建立了弓形面积的公式：

$$\sigma = \frac{d}{2}\cdot\frac{s}{2} - \left(\frac{d}{2} - h\right)\frac{a}{2} \qquad \text{（小于半圆的弓形）}$$

或

$$\sigma = \frac{d}{2} \cdot \frac{s}{2} + \left(h - \frac{d}{2}\right)\frac{a}{2}. \quad （大于半圆的弓形）$$

此处 d 为直径，s 为弦所对弧长，a 为弦长，h 为弦心距. 花拉子米还研究了棱柱、圆柱、棱锥、圆锥和棱台等立体的体积测量问题. 在"测量篇"中，可以发现一些来自印度数学的资料，以及来自希腊数学家海伦的《度量论》中的内容. 可见花拉子米是熟悉古代印度和希腊的学术遗产的.

花拉子米在天文学、地理学和历史学等方面也有重要贡献. 天文学在中世纪东方精密科学中占有重要地位. 古希腊和印度的天文学对中世纪伊斯兰世界天文学发展有很大影响. 8世纪以后希腊天文学论著陆续译成阿拉伯文，印度天文学知识也在8世纪末传入巴格达. 9世纪开始出现第一批用阿拉伯文撰写的天文学著作. 其中为解决天文学问题所需的三角表和天文表的汇编称为积尺(相当于印度的悉檀多)，借助这些数据表来测定时间、计算天体上星球位置、确定日食和月食开始的时刻等. 这些积尺在当时的天文学著作中占有重要地位. 花拉子米撰写的有关著作是比较优秀的，他努力使古希腊罗马的天文学理论和传入古波斯的印度天文学知识结合起来，详细阐明了在印度天文学中臻于完善的方法，对托勒密的天文学理论系统做了补充. 除积尺外，花拉子米还撰写了其他天文学著作. 其中有三种是专门讲述星盘知识的. 论述了各种星盘的构造、功能和应用，并介绍了另一种天文仪器——正弦平方仪. 他还撰写了一些关于日规和历法的著作.

中世纪阿拉伯国家对地理科学也是十分重视的，这可能是由于军事和商业贸易上的需要. 在当时，这方面的首要任务是制造世界地图. 地图的制作需要复杂的数学和天文学知识，因此地理学著作是与数学和天文学紧密联系在一起的. 科学家们把古希腊罗马时期的数学地理学原理作为研究地理学的主要依据. 花拉子米是中世纪阿拉伯世界第一部地理学专著的作者，他的《地球景象书》为地理学的研究工作奠定了基础. 这部著作的阿拉伯文本现

存斯特拉斯堡图书馆．书中首先详述了当时所知的地球上的居民区并画出包括重要居民点(标明坐标)、山、海、岛、河流等的地图．作者参考了希腊的有关著作，但具有独创性，给出许多全新的资料．例如，他把地球上居民区分为7个“气候带”，还修正了托勒密有关著作中的一些数据．该书附有四张地图，是用最古老的阿拉伯制图术绘制的．这部著作为中世纪近东和中东地理学、大地测量学和制图学的发展奠定了基础．

花拉子米还用阿拉伯文写出了最早的历史著作，他的《历史书》在这门科学的发展中起到了重要作用．

文　　献

原始文献

[1] L. C. Karpinski and Robert of Chester's Latin, Translation of the algebra of al-Khowarizmi, New York, 1915.

[2] А. П. Юшкевич, Арифметический трактат мухаммеда бен муса ал-Хорезми, Труды института истории естествознания и техники, том1, 1954.

研究文献

[3] G. J. Toomer, Al-Khwārizmi, 见 Dictionary of scientific biography, Vol. 7, 1973, pp. 358—365.

[4] Мухаммад ибн муса ал-Хорезми к 1200-летию со дня рождения, ИИЕиТ АН СССР, ИВ АН УзССР, Москва, 1983.

[5] П.Г. Булгаков, Б. А. Розенфельд, А. А. Ахмедов, Мухаммад ал-Хорезми около 783— около 850, Москва, 1983.

[6] А. П. Юшкевич, История математики в средние века, Москва, 1961.

[7] [苏] С. Х. 希拉日吉诺夫，Г. П. 马特维耶夫斯卡娅，穆罕默德·伊本 穆萨·阿尔-花拉子米及其对科学史的贡献，科学史译丛，4(1984)，第50—57页．

[8] 杜瑞芝，花拉子米和他的代数著作，数学的实践和认识，1(1987)，第79—85页．

[9] 杜瑞芝，花拉子米的算术著作，辽宁师范大学学报增刊(数学史专辑)，1986，第50—56页．

马 哈 维 拉

陈 一 心

（湖南科学技术出版社）

马哈维拉（Mahāvīra） 9世纪活跃于印度迈索尔．数学．

马哈维拉是印度南部迈索尔人，耆那教教徒，曾在拉喜特拉库塔王朝（Rāṣṭrakūṭa）的宫廷里生活过很长一段时间． 约公元850 年，他撰写了《计算精华》（Gaṇitasārasaṅgraha）一书．该书在印度南部曾被广泛使用，11 世纪被译成泰卢固语．20 世纪初，它被重新发现．1912 年，在马德拉斯译为英文出版．《计算精华》是印度第一本初具现代形式的数学教科书，现今数学教材中的一些论题和结构在其中已可见到．

马哈维拉的工作属于纯数学领域，对天文学问题几乎没有涉猎．这与他的前辈们是颇为不同的．在古代印度，数学家一般也是天文学家．

马哈维拉的《计算精华》共含 9 章：（1）术语；（2）算术运算；（3）与分数有关的运算；（4）有各种特点的运算；（5）与三分律（比例律）有关的运算；（6）混合运算；（7）面积计算；（8）与挖掘有关的计算；（9）与影子有关的计算．

马哈维拉改进和推广了他的前辈们的许多结果，其中最有特色的研究包括：零的运算、二次方程、利率计算、整数性质、排列组合、单分数法则，等等．

1. 零的算法

《计算精华》中叙述了零的算法："一个数乘零得零，一个数加

零、减零或除以零，这数都不变”．这表明，当时尚未认识到零不能作除数。

2. 一元二次方程和不定方程

在这方面，成书于约公元 1 世纪时的中国《九章算术》已有较多的成果。公元 3 世纪时，希腊数学家丢番图（Diophantus）著《算术》一书，也解决了不少二次方程、不定方程问题，但他不承认负数的合理性．马哈维拉以前的印度数学家不断地研究了这些方程的解法，阿耶波多（Āryabhaṭa I）建立了求一次线性不定方程正整数通解的法则，即库塔卡（Kuttaka）。婆罗摩笈多（Brahmagupta）给出了一元二次方程的一个求根公式。马哈维拉也讨论了很多这方面的问题。例如：

“一根柱子的 $\frac{1}{12}$ 乘以 $\frac{1}{30}$ 没于水中，剩下的 $\frac{1}{20}$ 乘以 $\frac{3}{16}$ 埋在淤泥里，还有 20 腕尺露出在水面上，亲爱的朋友，请问这柱子有多高?”

马哈维拉给出方程

$$\left(x-\frac{x^2}{12\times 30}\right)-\frac{1}{20}\cdot\frac{3}{16}\left(x-\frac{x^2}{360}\right)^2=20,$$

并求出了它的有理解。

在另一些问题中，他还给出了形如

$$x-(bx+c\sqrt{x}+a)=0$$

的方程的解。

马哈维拉对库塔卡也作了一些改进．他在倒回去求方程的解时省略了用第一个商数参与运算的一步，一个未知数是用代入方程法求得的。但他总是躲闪着不让辗转除法的余数为 0，这其实是不必要的。

3.“花环数”

两整数相乘，若其乘积的数字呈中心对称，马哈维拉便称之

为“花环数”，例如：

$$14287143 \times 7 = 100010001;$$

$$142857143 \times 7 = 1000000001;$$

$$12345679 \times 9 = 111111111;$$

$$333333666667 \times 33 = 11000011000011;$$

$$11011011 \times 91 = 1002002001;$$

$$27994681 \times 441 = 12345654321.$$

他对这种状似花环的特殊整数的构成规律进行了研究.

4. 排列组合

古代耆那教典籍中含有一些简单的排列组合问题，马哈维拉给出公式

$$c_n^r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots r}.$$

5. 单分数法则

单分数是分子为 1 的分数. 古埃及数学家阿梅斯(Ahmes)曾造出把分数 $\frac{2}{2n+1}$ 表示成单分数和的表 ($n=1$—49)，其原理很可能是经验性的. 马哈维拉研究出一套比较完整的单分数表示法：

(1) 把 1 表示成 n 个单分数的和

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^{n-2}} + \frac{1}{2\cdot 3^{n-2}}.$$

(2) 把 1 表示成 $2n-1$ 个单分数的和

$$1 = \frac{1}{2\cdot 3\cdot \frac{1}{2}} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot \frac{1}{2}} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)\cdot 2n\cdot \frac{1}{2}} + \frac{1}{2n\cdot \frac{1}{2}}.$$

(3) 把给定的单分数表示成 r 个分子分别为 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 的分数之和

$$\frac{1}{n}=\frac{a_1}{n(n+a_1)}+\frac{a_2}{(n+a_1)(n+a_1+a_2)}+\cdots$$

$$+\frac{a_{r-1}}{(n+a_1+a_2+\cdots+a_{r-2})(n+a_1+a_2+\cdots+a_{r-1})}$$

$$+\frac{a_r}{a_r(n+a_1+\cdots+a_{r-1})}.$$

(4) 把任何分数表示为单分数的和

若 $\frac{p}{q}$ 是给定的分数 $(p<q)$，选择 i 使得 $\frac{q+i}{p}$ 为一个整数，比如说为 r，则 $\frac{p}{q}=\frac{1}{r}+\frac{i}{rq}$。对 $\frac{i}{1-q}$ 重复此过程，因为 $i<p$，此过程经有限步便停止了。

(5) 把一个单分数表示为两个单分数的和

方法一：$\frac{1}{n}=\frac{1}{pn}+\frac{1}{\frac{pn}{p-1}}$，其中 p 的选择使 $p-1$ 能被 n 整除；

方法二：$\frac{1}{ab}=\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{b(a+b)}\ (b\geqslant 1)$。

(6) 把任何分数表示成有给定分子的两分数之和

$$\frac{m}{n}=\frac{a}{\frac{ap+b}{m}\cdot\frac{n}{p}}+\frac{b}{\frac{ap+b}{m}\cdot n},$$

其中 p 可整除 n，m 可整除 $ap+b$。

结合(1)和(6)，任何分数都可表示为 $2n$ 个带给定分子的分数之和。

在几何学方面，马哈维拉重新研究了婆罗摩笈多关于边为有理数的圆内接四边形的作图。像婆罗摩笈多一样，马哈维拉也没有觉察到这类四边形必须是内接于圆的。

马哈维拉所讨论过的几何作图问题很多，例如：(1)给定一条

边,作一个其他两边均为有理数的直角三角形;(2)给定一斜边 c,求作一直角三角形,使二直角边均为有理数;(3)求作一个三边相等的梯形;(4)求作一有给定面积的圆内接四边形;(5)作一有给定周长的圆内接四边形;(6)求作一长方形,使其面积在数量上是其周长或对角线长的倍数,或者一般地,是其边长与对角线长的线性组合;(7)作两个长方形:①其周长相等,但其中一个的面积是另一个的 2 倍;②其面积相等,但其中一个的周长是另一个的 2 倍;③一个长方形的周长是另一个的 2 倍,其面积是另一个的 $\frac{1}{2}$. 最后这个作图问题,一般地对应着方程

$$m(x+y)=n(u+v),$$
$$pxy=quv,$$

其中 (x,y),(u,v) 分别为两个长方形的边,m,n,p,q 是给定的数。马哈维拉得到了两个解。

马哈维拉还研究过椭圆和其他几何图形。他给出椭圆的面积为周长×$\frac{1}{2}$ 半短轴,这个错误的结果可能是从圆面积 $\pi d\times\frac{d}{4}$(其中 d 为圆的直径)类推而来的。对于弓形面积,他用了近似公式 $S=\frac{1}{2}(b+h)h$(其中 b 为弓形的弦长,h 为弓形的高),这一公式最早出现在中国古代数学名著《九章算术》中。

文　　献

原始文献

[1] Mahāvīra, Gaṇitasārasaṅgraha, Madras, 1912.

研究文献

[2] B. Datta and A. N. Singh, History of Hindu mathematics, Asia Publishing House, Bombay, 1938.

[3] A. K. Bag, Mathematical in ancient and medieval India, Chaukhambha Orientalia, Varanasi, 1979.

[4] David Pingree, Mahāvīra, 见 Dictionary of scientific biography, Vol.9, 1981., p.22.

[5] D. E. Smith, The Ganita-Sara-Sangraha of Mahāvīrācārya, *Bibliotheca Mathematica*, 3 (1908—1909), 9, pp. 106—110.

[6] E. T. Bell, Mahavira's diophantine system *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*, **38** (1946), pp. 121—122.
[7] А. П. Юшкевич, История математики в средние века, Москва, 1961.
[8] А. И. Володарский, Очерки истории средневековой индийской математики, Издательство «Наука», Москва, 1977.

巴　塔　尼

王　青　建

（辽宁师范大学）

巴塔尼（al-Battānī, Abū'abd Allāh Muḥammad ibn Jabir ibn Sinān al-Raqqī al-Ḥarrānī al-ṣābi）约公元858年生于卡雷(Carrhae,今土耳其哈兰)附近;公元929年卒于今巴勒斯坦境内吉斯堡（Qaṣr al-Jiss）．天文学、数学．

巴塔尼在欧洲中世纪被称为阿尔巴塔尼，名字常用的拉丁文拼法是 Albategnius。

巴塔尼的父亲哈拉尼（Jābir ibn Sinan al-Ḥarrānī）是一位很有名气的天文仪器制造者。也许是因为受父亲的影响，巴塔尼不仅对天文学研究极感兴趣，而且能够熟练地制作一些天文观测仪器．他一生的大部分时间是在幼发拉底河左岸的拉卡城（al-Raqqa）渡过的，自公元 877 年起在那里长期从事天文观测工作，晚年将观测结果总结在他的主要著作《天文论著》中．有关巴塔尼的生平史料很少,多依据纳迪姆(Ibn al-Nadīm)约公元987年的一部著作和基夫提(Ibn al-Qiftī,?—1248)的《学者的历史》(Ta'rīkh al-Ḥukamā）中关于巴塔尼的一章，从中得知巴塔尼的天文学贡献,包括他撰写的至少 3 部论著。 另外也有材料说巴塔尼是一个有头衔的贵族,甚至当过叙利亚的国王,但未能确定。

著作概况

《天文论著》（Kitāb al-Zij）是巴塔尼的成名之作，成书于公元 900 年之前,共有 57 章。除原著外,还有两种修订本,手稿存于

西班牙埃斯库里亚尔（Escorial）。 书名中的 Zij 一词取自中古波斯语，原意为地毯或绣品的经线，这里表示一般意义的天文著作。

《天文论著》的一种拉丁文译本是由英国人 R. 雷蒂南西斯(Retinensis)完成的。雷蒂南西斯也被称为卡坦纽斯(Cataneus)，是活跃于 12 世纪中叶的翻译家，可惜他的译本失传了。 现存唯一的拉丁文译本是意大利蒂沃利（Tivoli）的普拉托（Plato of Tivoli）译出的。他于 12 世纪上半叶活跃于西班牙巴塞罗那，其译本于 1537 年在德国纽伦堡首次印刷发行，题目为《星的运动》(De motu stellarum)，1645 年在意大利波伦亚再度刊行，题目改为《星的科学》(De scientia stellarum)，影响较广。1819 年法国天文学家、数学家 J. B. J. 德朗布尔（Delambre）在巴黎出版《中世纪天文学史》(Histoire de l'astronomie du moyen âge)一书，就是基于普拉托的波伦亚版译本。德朗布尔在该书第三章中详尽分析了巴塔尼《天文论著》的内容。1899 年，意大利"东方学"学者 C. A. 纳利诺（Nallino）在米兰出版了巴塔尼《天文论著》的阿拉伯文本，试图还该书的本来面目。此后 8 年间，他又陆续出版了《天文论著》的新拉丁文译本和对《天文论著》的详尽注释。纳利诺的第三种拉丁文版本虽晚于前两版 8 个世纪，但因其译本清晰纯正而受到高度评价，被认为是科学史上的权威版本之一。

《天文论著》还保存下来一种西班牙译本，是应 13 世纪西班牙国王阿方索十世(Alfonso X)萨维奥(el Sabio, 1252—1284 年在位)之命翻译的，存于巴黎一图书馆中。此外，由于《天文论著》在犹太学者中的巨大影响，据信应有希伯来文译本存世。

巴塔尼保存下来的其他著作有《黄道十二宫的上升》(Kitāb Maṭāliᶜ al-Burūj）和《星占学应用的数量》(Kitāb Aqdār al-Ittiṣālāt)。前者给出发现太阳远地点或行星远日点方向一类天文问题的数学解答，后者是对古希腊天文学家托勒密（Ptolemy）《四部书》(Tetrabiblos）评注的组成部分。 巴塔尼还有 3 种著作论及星占学，均已失传。此外有一部题为《正弦(表)制作原理的结构》

(Tajrīd usūl tarkīb al-juyūb）的著作冠以巴塔尼的名字，但因其中的用词习惯与巴塔尼不符，可能不是他的著作。

主要贡献

巴塔尼的主要贡献在天文学，由于天文计算的需要而发展了三角学理论。这一切集中体现在他的《天文论著》中。

在该书的序言里巴塔尼宣称，由于发现天文学前辈的著作中有许多错误的和与实际情况不一致的地方，才促使他进行写作。《天文论著》基于托勒密《天文学大成》（Almagest）的阿拉伯文本，沿用了 60 进制分数。但在许多问题上给出新的结论，并对托勒密的数据作了大量修订。

在天文学上，巴塔尼最著名的贡献是发现太阳远地点的进动。太阳远地点最初是由古希腊天文学家希帕霍斯(Hipparchus)测定的，在 65°30′ 处。托勒密写《天文学大成》时沿用了希帕霍斯的结果，认为这一数值是不变的，并据此推断不可能发生日环食。巴塔尼在《天文论著》第 28 章中从讨论四季长度入手，根据自己的观测结果，指出太阳远地点的观测值已增加到 82°17′，平均约 66 年增加 1°。结合他关于月球平均运动的理论，继而得出可发生日环食的结论。同时也修正了希帕霍斯和托勒密关于太阳偏心距的数值。书中还记载了一次日食和一次月食，分别发生于公元 901 年的 1 月 23 日和 8 月 2 日。

巴塔尼改进了回归年的长度，其依据是同代天文学家、数学家塔比伊本库拉（Thābit ibn Qurra）测定的岁差值，即每 66 年改变 1°。该值比希帕霍斯最早发现、托勒密沿用的每 100 年改变 1° 的岁差值精确。巴塔尼推算的回归年长度为 365 日 5 时 46 分 24 秒，虽比标准长度 365 日 5 时 48 分 46 秒稍短，但比托勒密等人沿用几百年的值 365 日 5 时 55 分 12 秒好得多。他还在实测的基础上改进了四季的长度，后来编制过较精确的日、月运行表。

巴塔尼在天文学上的另一成果是较精确地测量了黄赤交角。他发现自托勒密以来黄赤交角逐渐缩小，但伊斯兰天文学家所给

数据偏小。通过测定,他得到的当时的黄赤交角值为 23°35′,与用现代公式求得的结果一致。

为了观测,巴塔尼还设计和创造过一种新型的浑天仪,一种壁式象限仪和一个三分仪。

巴塔尼在数学上以改进天文计算方法而著称，并因此而发展了三角学理论。主要贡献是：定义三角函数、得到计算三角函数的公式和制作三角函数表等,多载于《天文论著》第 3 章中。

巴塔尼使用半弦代替整弦定义正弦。正弦概念最早萌发于古希腊希帕霍斯.他当时以不同圆心角所对的弦长值制造了一张表,被认为是正弦表的前身。托勒密沿用这种方法制作了 0°—90° 每隔半度的弦表。后来希腊数学输入印度，阿耶波多 (Āryabhata) 等人改为计算半弦,相当于现在的正弦线,并制作了正弦函数表。巴塔尼采用了这种改进的方法，同时使用了当时尚未通行的余弦概念,称之为“90° 余角的正弦”。他还用了正矢概念,称之为“反正弦”。

巴塔尼没有给出正切和余切的定义,但他为了研究日晷,实际上使用了这两种函数。他称余切为“直阴影”,正切为“反阴影”,并制作了一个间隔为 1° 的余切函数表。 在他的著作中有余切公式和关于球面(钝角)三角的余弦公式的载述。他在三角学方面的工作在 15 世纪由德国数学家 J. 雷格蒙塔努斯 (Regiomontanus) 继承和发展,影响到整个欧洲三角学的进程。

影响

巴塔尼在伊斯兰天文学家和历史学家中获得极高声誉. 11 世纪天文学家比鲁尼 (Abū Rayhān al-Bīrūnī) 写过一部著作,题目为《巴塔尼〈天文论著〉中的天才说明》。另一位阿拉伯学者哈尔杜恩 (Ibn Khaldūn) 称： 巴塔尼的著作是伊斯兰天文学中最优秀的著作。在拜占庭留下的文献中,巴塔尼的名字也常被提及,中世纪大量拉丁文文献中都可见到巴塔尼著作的影响。

著名波兰天文学家 N. 哥白尼 (Copernicus) 在他的《天体

运行论》(De revolutionibus orbium coelestium, 1543) 中常常引用巴塔尼的成果。特别是论述太阳运动和岁差时更以巴塔尼的结论为参考。此外，奥地利数学家、天文学家 G. 波伊巴赫(Peurbach)、丹麦天文学家第谷(Tycho Brahe)等欧洲学者在论著中也较多地参考了巴塔尼的成果。德国天文学家 J. 开普勒(Kepler)和意大利科学家 G. 伽利略 (Galilei) 都对巴塔尼的观测结果表现出兴趣。他被认为是欧洲中世纪最著名的天文学家之一。

巴塔尼在数学上的影响来自他对三角学的贡献，哥白尼、第谷等人在引用他的天文成就时也借鉴了其三角学的方法。他使用的三角函数概念及计算方法出现在许多后世数学家专著中，有些沿用至今。

巴塔尼还刻意评注托勒密的星占学著作《四部书》，这书被托勒密本人认为是《天文学大成》的补充，原意为"星占学的影响"。巴塔尼评注时写了数篇文章，论述了星占学与天文学，特别是日月食的关系。但现在只有残篇保存，其影响相对于他的天文学和数学来说要小得多。

文　献

原始文献

[1] C. A. Nallino, Al-Battānī sive Albatenii Opus astronomicum, Milan, Vol. I, 1903; Vol. II, 1907; Vol. III, 1899.

研究文献

[2] J.-B. J. Delambre, Histoire de l'astronomie du moyen âge, Paris, 1819; 再版, New York-London, 1965.

[3] J. M. Millas-Valherosa, Estudios sobre Azarquiel Madrid-Granada, 1943—1950.

[4] E. Honigmann, Bemerkungen zu den geographischen Tabellen al-Battānī's, *Rivista Degli Studi Orientali*, **11**(1927), pp. 169—175.

[5] E. S. Kennedy & Muhammad Agha, Planetary visibility tables in Islamic astronomy, *Centaurus*, 7(1960), pp. 134—140.

[6] W. Hartney, Al-Battānī, 见 Dictionary of scientific biography, Vol. 1, 1970, pp. 507—516.

艾布瓦法

孙宏安
（辽宁师范大学）

艾布瓦法（Abū'l-Wafā' al-Būzjānī, Muhammad ibn Muhammad ibn Yahyā ibn Ismā'īl ibn al-'Abbās） 公元940年6月10日生于布山(Būzjān,今属伊朗);公元997或998年卒于巴格达(今伊拉克首都)。数学,天文学。

艾布瓦法具有波斯血统。他的出生地布山是现今伊朗霍腊散(Chorassan）地方的一个小城。公元959年,他离开故乡,来到东阿拉伯的首府巴格达。在巴格达，艾布瓦法成为数理天文学派的最后一位重要代表人物，该学派是在9世纪初形成的。艾布瓦法和他的同事们在巴格达天文台进行了系统的天文观测活动。他继承了阿拉伯数理天文学的传统,写出许多具有独创性的科学著作,同时还为欧几里得（Euclid）和丢番图（Diophantus）的经典著作以及花拉子米（al-Khwārizmī）的代数学著作，做过注释。这些工作促进了东西方数学的交流，对古希腊数学文献的流传起了积极的作用。可惜的是,他的注释工作没有留传下来。

艾布瓦法的数学成就主要在三角学方面：造出比较精确的三角函数表;提出并证明了正弦和差化积公式;证明球面三角形的正弦定理并用来解斜三角形等。他在算术、几何和代数方面亦有一些创新。下面以著作为序介绍他的成就。

1.《文书和商业用算术》(Kitāb fi mā yahtaj ilayh al-kuttāb wa'l-'ummāl min 'ilm al-hisāb, 英译名: Book on what is necessary from the science of arithmetic for scribes and businessmen)

这是艾布瓦法于公元 961—976 年之间写的一部实用算术著作。是一部得到广泛称道的书。该书分为 7 卷 (manāzil), 每卷 7 章(abwāb)。前 3 卷是关于纯数学 (比例、乘除、面积)的; 后 4 卷是关于解实际问题的,包括工资支付、建筑结算、谷物兑换和销售等问题的解法。

在这部书中,艾布瓦法系统地改进了东阿拉伯管理机构日常工作中所用的计算方法,指出了某些广泛存在的错误,例如当时的土地测量人员常用的以对边和之半的乘积来求四边形面积的算法。"为了不使书太厚并且不妨碍理解",艾布瓦法的这部书中没有引人证明,不过,他在一些例子中定义了基本概念和术语,还定义了整数和分数的乘除运算。

该书指出,巴格达学者于 8 世纪就了解并很快开始运用印度人的 10 进位值制记数法和数字,但在很长时期内,在东阿拉伯的商业及一般居民中却没有应用它们。考虑到这部著作的主要读者群的习惯,艾布瓦法在书中没有采用印度数码。所有的数及其计算,即使十分复杂,也完全用当时的书面自然语言来表述。

(1) 分数计算　艾布瓦法的分数计算是很有特色的,也是这部书的重要成果之一。在当时,形如 m/n (m, n 为整数, $m > 1$) 的分数的计算,对专家以外的人来说是十分少见的。商人和其他业务人员长期应用他们的"基本分数"。按艾布瓦法的说法,基本分数分为三种: ①由 $1/2$ 到 $1/10$ 的单位分数,艾布瓦法称之为"主分数" (principal fractions); ②形如 m/n (其中 $2 \leqslant m < n \leqslant 10$)的分数,称为"混合分数"; ③主分数的乘积。其中 $2/3$ 占有重要的地位。主分数的特点是,在当时的阿拉伯语言中构成它们的词都有某种神秘的意义。所有形如 m/n 且 $n = 2^P 3^Q 5^R 7^S$ (P,

Q,R,S 为非负整数)的分数都可以表示为基本分数的和与积的展开形式。

艾布瓦法详细阐述了利用专门的规则和一些辅助性表格进行这种展开的方法。其中形如 $a/60$ 的分数在展开运算中起重要的作用。先把分数 m/n 表示为形如 $m\cdot\frac{60}{n}\div 60$ 的形式:

$$\frac{m}{n}=m\cdot\frac{60}{n}\div 60=\frac{k+\alpha}{60}.$$

其中 $k<60$, $\alpha<1$, k 为整数,然后分 $\alpha=0$ 和 $\alpha\neq 0$ 两种情况给出许多具体的展开方式。例如

$$\frac{49}{60}=\frac{45}{60}+\frac{4}{60}=\frac{30}{60}+\frac{15}{60}+\frac{4}{60}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{10}.$$

通常由一个分数可得到几种不同的基本分数展开式,艾布瓦法规定了怎样的展开式更具一般性,或者用他的话说,"更美些"。

如果一个既约分数的分母含有大于 7 的素因数,那么就可以得到一个有限的基本分数展开式。此时可得出下述类型的近似展开式

$$\frac{3}{17}\doteq(3+1)\div(17+1)=\frac{2}{9},\tag{1}$$

$$\frac{3}{17}\doteq 3\frac{1}{2}\div 17\frac{1}{2}=\frac{1}{5}.$$

或更好些,采用

$$\frac{3}{17}\doteq 3\frac{1}{7}\div 17\frac{1}{7}=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{10}.$$

除了选择一个"恰当"的数同时加到分子分母上的技巧性方法之外,艾布瓦法还介绍了一种一般方法,人们利用它能够较快地得出一个好的近似,他采用 $\frac{a}{60}$ 形式的分数,如

$$\frac{3}{17}=\frac{180}{17}\div 60=\frac{10+\frac{10}{17}}{60}\doteq\frac{11}{60}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{10},\tag{2}$$

或者

$$\frac{3}{17}=\frac{10+\frac{10}{17}}{60}=\left(10+\frac{600}{17}\div 60\right)\div 60$$

$$=\left(10+\frac{35}{60}+\frac{5}{17}\div 60\right)\div 60$$

$$\doteq\left(10+\frac{35}{60}\right)\div 60=\left(10+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\div 60$$

$$=\left(6+3\frac{1}{5}+1\frac{1}{4}\right)\div 60=\frac{1}{10}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{8}. \tag{3}$$

式(1),(2),(3)的精确度依次提高，相对误差分别为 26%，4% 和 0.05%．艾布瓦法还给出一个更精确的展开式

$$\frac{3}{17}\doteq\frac{1}{10}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}.$$

他指出，其绝对误差为

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{17},$$

相对误差小于 0.001%．

这些计算似乎有点象古埃及人的方法，其特点为：①限于几个单位分数$\frac{1}{q}$，其中 $2\leqslant q\leqslant 10$；②利用了分数乘积 $\frac{1}{q_1}\cdot\frac{1}{q_2}$ 及 $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{q}$；③不拒绝使用混合分数 $\frac{m}{n}$，$1<m<n\leqslant 10$．对这种方法的起源颇有争议，许多人认为其基本思想来源于古埃及人；M. 梅德沃依（Медовой）则认为，这是东阿拉伯人自己创造出来的．

分数运算是通过基本分数进行的，如

$$\frac{4}{5}+\frac{2}{3}+\frac{3}{10}=\frac{\frac{4}{5}\cdot 60+\frac{2}{3}\cdot 60+\frac{3}{10}\cdot 60}{60}=\frac{106}{60}$$

$$=1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{10},$$

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)=\frac{\left(\frac{1}{4}\cdot 60+\frac{1}{5}\cdot 60\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)}{60}$$

$$=\frac{22\cdot\frac{1}{2}}{60}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}.$$

(2) 引入负数 《文书和商业用算术》的第 2 卷中有一个十分重要的引入负数的例子，这是阿拉伯文献中关于负数的孤例．艾布瓦法用日常语言表述了由 10 个数字表示的数的乘法规则，写成现代数学语言，就是

$$(10a+b)(10a+c)=\{10a+b-[10(a+1)-(10a+c)]\}10(a+1)+[10(a+1)-(10a+b)]\cdot[10(a+1)-(10a+c)],$$

然后他对 10 位数上是 0 且 $b=3$, $c=5$ 的数应用这一规则:

$$3\cdot 5=[3-(10-5)]\cdot 10+[10-3][10-5]$$
$$=(-2)\cdot 10+35=35-20$$

艾布瓦法把上式中从 3 减去(10—5)的结果(—2)称为"欠 (dayn) 2"．这可能受到印度数学的影响．印度数学中就用欠 (ksāya) 解释负数．

(3) 几何度量 在《文书和商业用算术》的第 3 卷中，艾布瓦法给出了度量更一般的平面图形和立体图形的规则： 三角形、各种四边形、正多边形、圆和圆的部分、球和球的部分等．他还列出一个对应于直径为 7 的半圆上的弧所对的弦长表，由半圆周的 $\frac{m}{22}$ ($m=1,2,\cdots,22$) 组成．给出一个用圆内接正 n 边形的边长来求圆的直径的公式，用现代数学符号表示为

$$d=\sqrt{a^2\left[(n-1)\frac{n}{2}+3\right]\frac{2}{g}}.$$

艾布瓦法认为这一公式是印度人先得到的，当 $n=3,4,6$ 时

它显然是正确的，而在 n 为其他值时它给出一个较好的近似. 在第 3 卷之末，艾布瓦法还引入了在相似三角形基础上测量无法达到的对象的距离和高度的问题.

2.《手艺人几何作图法》(Kitāb fī mā yahtajilayh al-sāni 'min al-a'māl al-handasiyya, 英译名: Book on what is necessary from geometric construction for the artisan)

这是艾布瓦法于公元 990 年写的一部实用数学著作. 书中的许多平面和立体图形的作图都是由欧几里得、阿基米德(Archimedes)、海伦 (Hero of Alexandria)、西奥多休斯(Theodosius)和帕波斯 (Pappus) 的著作中摘录的.但也有些例子是独创的.作图问题的范围极广：由基本的平面作图题直到求作内接于一个给定球的正多面体. 大多数属"尺规作图"题,也有一些要求增加工具(如倍立方和三等分角),或只是近似作图（如利用圆内接正三角形的边长的一半为边，作同圆的内接正七边形）. 十分重要的是所谓"生锈"圆规作图问题,即用一个固定开度的圆规(只能作出定半径的圆)的作图问题. 这一问题也起源于古印度人和古希腊人,但艾布瓦法是利用"生锈"圆规解出大量作图题的第一个人. 经过他的工作,"生锈"圆规作图问题正式列入数学课题之中. 欧洲文艺复兴后,这种作图题得到深入而广泛的研究，L 马斯凯罗尼 (Mascheroni), J. 庞斯列 (Poncelet), J. 施泰纳 (Steiner) 等人发展了关于它的一般理论和相应的作图法. 艾布瓦法在这方面的一个例子是：用一个开度等于给定圆半径的"生锈"圆规，作这个给定圆的内接正五边形.

3.《天文大全》(al-Majistī 或 Kitāh al-kāmil, 英译名: Complete book)

这是一部天文学著作,继承了托勒密 (Ptolmy) 的《天文学大成》(Almagest) 的工作. 一般认为,艾布瓦法对理论天文学没有引入任何实质上新的东西，但他记录的大量观测资料为其后许多

天文学家所采用。这部著作的成就主要在三角学方面。

（1）*三角函数表* 艾布瓦法是第一个计算现代意义下的三角函数的人，经他改进的正弦表十分著名。为了制出新的正弦表，他比较精确地计算出 $\sin 30'$ 的值。他的方法是：先求三个接近 $30'$ 的弧的正弦值，例如 $\frac{12^\circ}{32}$，$\frac{15^\circ}{32}$，$\frac{18^\circ}{32}$，相差都是 $\frac{3^\circ}{32}$。它们的正弦值可由 $\sin 72^\circ$ 和 $\sin 60^\circ$ 通过一系列有理运算和开平方运算得出。例如 $\sin \frac{12^\circ}{32} = \sin \frac{72^\circ - 60^\circ}{32}$ 等。他求出

$$\sin(\alpha - \beta) = \sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\alpha \sin^2\beta} - \sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\alpha \sin^2\beta},$$

进而采用赛翁（Theon of Alexandria）为帕波斯《天文学大成》作的注释中提出的定理：角的正弦值随角的增加而增加。他由此得出几个不等式并利用这些不等式得出，在一个半径为 60 的圆中，以 60 进位的数表示的 $\sin 30'$ 的值为 $31^{\mathrm{I}}24^{\mathrm{II}}55^{\mathrm{III}}54^{\mathrm{IV}}55^{\mathrm{V}}$。这一值有 4 位正确数字，而 5 位正确数字的值为

$$\sin 30' = 31^{\mathrm{I}}24^{\mathrm{II}}55^{\mathrm{III}}54^{\mathrm{IV}}0^{\mathrm{V}}.$$

艾布瓦法之前，一般采用托勒密的方法，在第 3 位上就出现错误。如果以 10 进位数表示，且取半径为 1，则艾布瓦法的值为 $\sin 30' = 0.0087265373$，而现代精确值为 0.0087265355，艾布瓦法的值在 10^{-8} 位上还是正确的。在此基础上，他的三角函数表给出了每隔 $15'$ 的正弦值、正切值和余切值。

（2）*正弦的和差化积公式* 这是艾布瓦法的另一项数学成就。他指出："当两个弧的正弦和余弦已知时，可求出这两弦之和或差的正弦值。把每个正弦值乘以另一个弦的余弦值，则两弧的和的正弦等于这两个乘积之和，两弧的差的正弦等于两个乘积之差。"他还给出一个统一的证明。

（3）*"四量规则"* 这是艾布瓦法的一个球面三角学成果。在他之前，解球面三角形的主要工具是关于完全四边形的门纳劳斯（Menelaus）定理，在阿拉伯文献中称之为"六量规则"。这个定理在许多情况下的应用十分麻烦。艾布瓦法充实了球面三角学中的

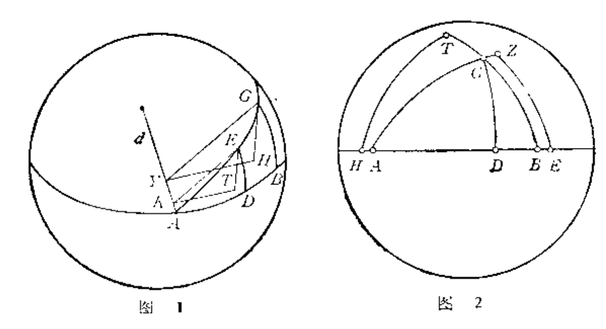


图 1　　　　图 2

解题工具，他应用正切定理来解球面三角形，其核心的工作是下述定理：如图 1，如果 ABG 和 ADE 是两个球面直角三角形，其中B,D 分别为直角，A是公共锐角，则$\sin(BG):\sin(GA)=\sin(DE):\sin(EA)$。按比鲁尼（al-Bīrūnī）的说法，艾布瓦法证明了这个定理。在阿拉伯文献中，这个定理被称为"四量规则"。

（4）球面三角形的正弦定理及其应用　艾布瓦法是最早证明球面三角形的正弦定理的人之一，并且最先用这一定理来解球面三角形。这一定理表述为：如果 ABG 是一个球面三角形，三边分别为 a,b,g，且分别对应角 A,B,G，则

$$\frac{\sin(a)}{\sin(A)}=\frac{\sin(b)}{\sin(B)}=\frac{\sin(g)}{\sin(G)}.$$

艾布瓦法的证明可用现代数学语言表述如下：如图 2，给定球面三角形 ABG，设 GD 是垂直于 AB 的大圆的弧，延长 AB 和 AG 得到 AE 和 AZ，使之各成 $90°$ 的弧。延长 BA 为 BH，BG 为 BT，使之都成 $90°$ 的弧。于是A是大圆 EZ 的极点，B 是大圆 TH 的极点。因而角 E,H 都是直角，右旋三角形 ADG 和 AEZ 都是直角三角形，且它们有公共角 A。按"四量规则"，有

$$\frac{\sin(\widehat{DG})}{\sin(b)}=\frac{\sin(\widehat{ZE})}{\sin(\widehat{ZA})},\quad \frac{\sin(\widehat{DG})}{\sin(a)}=\frac{\sin(\widehat{TH})}{\sin(\widehat{TB})}.$$

但 A, B 分别为 $\overset{\frown}{ZE}$ 和 $\overset{\frown}{TH}$ 的极点,由球面角的定义, $\overset{\frown}{ZE}=\measuredangle A$, $\overset{\frown}{TH}=\measuredangle B$,所以上式可改写为

$$\frac{\sin(\overset{\frown}{DG})}{\sin(b)}=\frac{\sin(A)}{R}, \quad \frac{\sin(DG)}{\sin(a)}=\frac{\sin(B)}{R},$$

两式中消去 $\sin(\overset{\frown}{DG})$, 得

$$\frac{\sin(a)}{\sin(A)}=\frac{\sin(b)}{\sin(B)}.$$

同理可证

$$\frac{\sin(a)}{\sin(A)}=\frac{\sin(g)}{\sin(G)},$$

所以有

$$\frac{\sin(a)}{\sin(A)}=\frac{\sin(g)}{\sin(G)}=\frac{\sin(b)}{\sin(B)}.$$

由于艾布瓦法的卓越数学成就，月球上有一座环形山以他的名字命名,以资纪念。

文　　献

原始文献

[1] Abū'l-wafā', Kitāb fī mā yahtaj ilayh al-kuttāb wa'l-'ummāl min 'ilm al-hisāb, 手稿现存 Library of the University of Leiden & National Library, Cairo.

[2] Abū'l-wafā', Risāla fi'l-aritmatīqī, 手稿现存 Institute of Oriental Studies of the Academy of Sciences of the Uzbek S. S. R

[3] Abū'l-wafā, Kitāb fī mā yahtajilayh al-sāni'min al-a'māl al-handasiyya, 手稿现存 Bibliothèque Nationale, Paris.

[4] Abū'l-wafa, al-Majistī, 部分手稿现存 Bibliothèque Nationale Paris.

研究文献

[5] F. Woepcke, Analyse et extraits d'un recueil de constructions géométriques par Aboûl Wafâ, *Journal Asiatique*, 5th ser., 5(1855), pp. 218—256, 309—359.

[6] P. Luckey, Die Rechenkunst bei Ǧamšid b. Mas'ūd al-kāši mit Rückblicken auf die ältere Geschichte des Rechnens. Wiesbaden, 1951.

[7] M. Медовой, Об одном случае применения отрицательных чисел у Абу-л-Вафи, *Историко-математические исследования*, 11(1958), pp.

593—598.

[8] J. Berggren, Episodes in the mathematics of medieval Islam, Springer-Verlag New York Inc. 1986, pp. 95—96, 174—176.

[9] А. Юшкевич. История математики в средние века, Госу. Изд. физико-мат. лит., М., 1961, pp. 185—190, 430—433.

比　鲁　尼

孙　宏　安
（辽宁师范大学）

比鲁尼 [al-Bīrūnī(或 Berūnī), Abū Rayhān(或 Abū'l-Rayhan) Muhammadibn Anmad]　公元973年生于花拉子模的比鲁尼(Biruni，今乌兹别克的一个城市)；1050年之后卒于伽色尼（Ghazna，今阿富汗之加兹尼）．天文学、数学、地理学、历史学．

比鲁尼出生和成长于咸海南部地区，他的出生地体现在他的名字之中．他的童年是在这个地区（当时为花拉子模）的两座首府——位于阿姆河右岸的凯斯（Kath)和左岸的朱坚尼亚（Jurjāniyya，今土库曼乌尔根奇)渡过的．

比鲁尼很早就开始了科学研究工作，并得到著名的花拉子模天文学家艾布纳苏（Abū Nasr Mansūr）的指导．他 17 岁时，就利用一个一边有刻度的圆环测量了凯斯地区的太阳中天高度，相当于当地的纬度．4 年以后，他制订了系统的纬度测量计划并制做了一些测量工具，在公元 995 年夏至日进行了一次观测．这期间，当地发生了战乱，比鲁尼不得不逃离故土．他很可能到了德黑兰附近的拉伊（Rayy)．当时天文学家胡坚迪（al-Khujandī）在拉伊的山上建造了一个巨大的墙仪，用它在公元 994 年测量了当地的纬度．比鲁尼写过一篇文章，描述了这一仪器及这次测量活动，并记录了观测资料．他的部分资料可能得自于胡坚迪本人．胡坚迪死于 1000 年，所以他们关于这次测量的交往不会离观测时间太远．这是比鲁尼到过拉伊的佐证．

公元997年前后比鲁尼回到凯斯，并于次年的5月24日，在该地仔细地观测了一次月食.事先他与艾布瓦法(Abū'l-Wafa)商定，由后者在巴格达观测同一次月食，然后用两地月食的时间差算出两地的经度差.接着，比鲁尼又到了里海之滨的戈尔甘（Gurgan）.1000年左右，他在那里把《古民族年表》（Chronology）题献给当地的统治者，这部书是现存的他的最早著作，而不是他的第一部著作，因为书中提到了他已完成的7部著作，但都已失传. 从它们的标题可知当时比鲁尼已涉猎了诸如数学、天文、历史等广泛的领域. 同时他还与住在布哈拉的数学家阿维森纳（Avicenna）就自然及热和光的传播等问题通过信. 比鲁尼在自己的著作中记载了阿维森纳实测地球子午线一度之长的工作.

比鲁尼于1003—1004年间回到自己的祖国，受到当政的花拉子模沙赫（shah，意为统治者）马穆恩（Ma'mūn）的青睐. 这使比鲁尼有可能在朱坚尼亚建立起天文台，制做大量天文仪器，进行系统的天文研究工作. 在他的著作中，记录了他这一时期所进行的天文观测工作，留下许多重要的观测资料.为了表示对沙赫的感激，比鲁尼积极参与了旨在巩固沙赫统治的政治活动，从而卷入到当时的一系列政治事件之中. 这些事件日益激化，最后，马穆恩被反叛的部众杀死，在附近崛起的伽色尼王朝的马默德（Mahmūd）苏丹乘乱于1017年攻占了花拉子模. 忠于马穆恩的比鲁尼被遣送到伽色尼王朝的内地，1018年他住在喀布尔附近的一个小村庄里，处境十分困难，但仍坚持科学研究，自制了一些简单的观测工具，观测并得出当地的纬度，记录了一些月食.

伽色尼王朝对比鲁尼的科学研究工作还是给了一定的支持，使他在1018—1020年间，得以购置一些天文仪器，进行天文观测，并测算了伽色尼的纬度.

当时的伽色尼王朝已扩张到印度地区，1010年，伽色尼征服了印度河流域，1022年占据了恒河河谷的一些地区，1026年，控制了由伽色尼通往印度洋的几乎所有通道. 在这种情况下，比鲁尼可以在印度各地旅行和居住，这使他产生了对印度文化的兴趣并

对其进行了研究．他的著作《印度》（India）就是研究成果，它对东西方文化的交流起了积极的促进作用．比鲁尼测算了印度一些城市的纬度，并利用南达奈（Nandana）附近的一座山测算过地球的大小。

比鲁尼在伽色尼住了很长时间，他在伽色尼的天文观测记录包括1019年夏至日的太阳高度，9月16日的月食，连续几年的“二分点”和“二至点”的观测等．最后一次记载是1021年冬至日的观测，这也是比鲁尼留传至今的最后一次观测记录．

1030年马默德苏丹去世．一年后，其长子马苏德（Mas'ud）继位，他对科学家采取了更宽容的政策，使比鲁尼有可能再返故土．事实上，比鲁尼至少作过一次返乡旅行．他在《书目》（Bibliography）一书中说自己在50岁时身患重病，61岁时有所好转．1040年后，他还写出两部书，后来的活动就不清楚了，只知道他在《药物学》（Pharmacology）一书中说自己过了80岁生日，视力和听力都已丧失，但仍在一名助手帮助下努力写作．由此推算，他当于1050年之后才去世．

比鲁尼毕生从事科学研究和写作，他一共写了大约146部著作，留传至今的只有22部．按已知其页数的著作估算，比鲁尼写出的手稿当有13000页之多．他的著作几乎涉及到当时所有的科学领域，如天文学、历史学、地理学、数学、力学、医学、药物学、气象学等．他特别偏重于那些易受数学影响的学科，他的大部分著作是有关天文学和占星术的．他在数学方面少有创新性的成果，但在数学的应用，尤其在数学的传播、东西方数学的交流方面，做出了突出的贡献．

（1）测算地球的大小　这是比鲁尼在《城市地理坐标之测定》（Tahdid）一书中记述的，后来他在《马苏德教规》（Mas'ud's Canon）一书中作了重述．他的方法如下．

先测算一座山的高度．准备一个正方形板 $ABGD$，AB 边上划出等分刻度．把板垂直放在地面上，板平面过要测的山的顶

点．固定 G，调整 B 使 G，B 和 E（山的顶点）在一条直线上．过 D 点观察 E 点，DE 与 AB 交于 T，如图 1 所示． $\triangle ADT \backsim \triangle GED$，所以 $TA:AD = DG:GE$，$GE = \dfrac{AD \cdot DG}{TA}$．$AD$，$DG$，$TA$ 都可由测量得出，所以可求出 GE．又可证 $\triangle DGH \backsim \triangle GEZ$，所以 $GE:EZ = DG:GH$，$EZ = \dfrac{GE \cdot GH}{DG}$，山高 EZ 便可求出了．

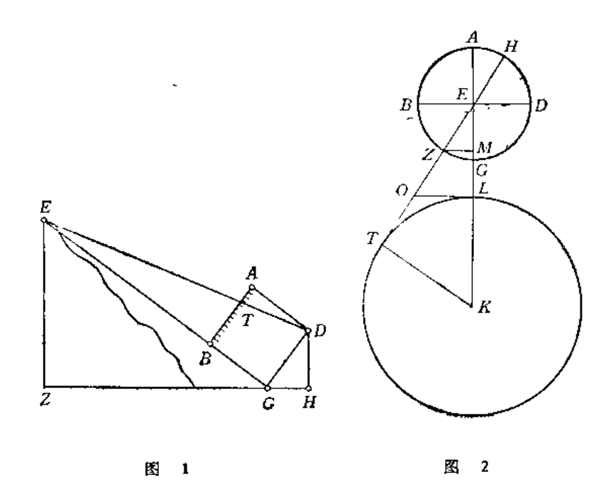


图 1　　　　图 2

再测算地球的大小． 如图 2 所示，设 KL 是地球的半径而 EL 是山高；设 $ABGD$ 是一个用以观测的大圆环，其边上刻有角度（度、分），ZEH 是一根可转动的尺，E 为尺的固定转轴．由尺的水平位置 BED 开始测量，转动尺，并顺尺的方向向下观察，直到看到尺指向地平线，取指向的地平线上的点为 T．$\angle BEZ$ 叫俯角，记为 α．过 L 作地球的切面，与 HT 交于 O．在 $\triangle ELO$ 中用正弦定理，有

$$EL:LO = \sin O:\sin E = \sin\alpha:\sin(90^\circ - \alpha)$$

由于α及山高 EL 都可测出来,所以可求出 LO,又由于 $TO = LO$,$EO = \sqrt{EL^2 + LO^2}$,所以 ET 可求. 再对 $\triangle ETK$ 用正弦定理,则可求出 TK,即地球的半径,从而可求出周长,即求出了地球的大小.

比鲁尼在印度的南达奈进行了实际的测算工作. 他的数据是: 俯角 $\alpha = 34'$;山高 625.05肘;得到的地球半径为 12803337.03肘;取 $\pi = 3\frac{1}{7}$, 地球周长为 80478118.2 肘. 这样,地球子午线上一度之长为 223550 肘,与当时地面测量的结果(224000 肘) 接近. "肘"是一种"同身"尺度(由人的肘到中指尖的长度), 在使用时其实际长度可能会因人而异. 据研究, 当时的一肘约合现代的 18—21 英寸,即 45.72—53.34 厘米. 如果按一肘 18 英寸计, 比鲁尼测算的子午线一度的长相当于 102 公里,按一肘 21 英寸计, 则相当于 119 公里. 虽然我们对比鲁尼所用的肘的实际长度已不得而知,但 102 公里到 119 公里包含了现代所测的值(111.2 公里), 可以认为比鲁尼测算结果的误差不大于 9 公里.

(2) *正九边形的近似作法* 几何作图也是阿拉伯数学的一项课题. 比鲁尼研究过著名的"三等分角"的作图题, 由此得出三次代数方程,并进而导出一种求三次方程近似正根的方法. 他利用这种方法,得到了正九边形的一种近似作图法,具有相当大的技巧性.

(3) *三角函数表* 比鲁尼在他的著作《论弦》(Chords) 中给出了一个三角函数表,包括正弦表和正切表, 他给出每隔 15′ 的正弦值和每隔 1° 的正切值. 与他的前辈们不同的是,他给出的是四位数表而以前多为三位数表. 比鲁尼在《马苏德教规》一书中进一步给出三角函数的插值公式,除了线性插值公式外,还有二次插值公式, 用现代数学符号表示,相当于

$$\sin x = \sin x_0 + (x - x_0)\cdot\frac{\sin(x_0 + 15') - \sin x_0}{15'}$$

$$+(x-x_0)^2\cdot\frac{\frac{\sin(x_0+15')-\sin x_0}{15'}-\frac{\sin x_0-\sin(x_0-15')}{15'}}{15'},$$

$$\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}x_0+(x-x_0)\cdot\frac{\operatorname{tg}(x_0+1^\circ)-\operatorname{tg}x_0}{1^\circ}$$

$$+(x-x_0)^2\cdot\frac{\frac{\operatorname{tg}(x_0+1^\circ)-\operatorname{tg}x_0}{1^\circ}-\frac{\operatorname{tg}x_0-\operatorname{tg}(x_0-1^\circ)}{1^\circ}}{1^\circ}.$$

二次插值公式的采用晚于中国的刘焯（公元600 年)和一行（公元727 年),但早于欧洲人(17 世纪).

（4）其他成就 比鲁尼在其他科学领域还有许多成就．他研究了一些古代民族的历法,特别是犹太历法;记载了许多古代民族的节日和民俗;研究了地图的画法理论;推广了阿基米德（Archimedes）的浮力原理,测出一些物质的密度;引入正弦、正割函数及它们的余函数,探讨了它们的关系,并用于天文测量；利用月食作为统一的时间标志测算两地的经度差,等等．特别应该指出的是,他的《印度》(India）一书详细介绍了印度文化，对东西方的文化交流起了促进作用．比鲁尼的著作中记载了他所做的大量天文观测的结果，为后人积累了宝贵的历史资料．他还是中亚地区最早提出地球绕太阳运行思想的天文学家．

文　献

原始文献

[1] Al-Bīrūnī, Al-Qānūn al-Mas'ūdī (Canon), 3 Vols., Hyderabad-Dn, 1954—1956（俄译本：Бируни, Избранные произведения, Ташкент, 1957).

[2] Al-Bīrūnī, Istikhrāj al-awtār f$_i$'l-dā'ira (Chords), Cairo, 1965.（俄译本：Из истории науки и техники в странах Востока, Москва, 1963).

[3] Al-Bīrūnī,Tahdīd, *Majallat ma'had al-makhtūtāt al-'arabiyya*(Cairo, 1962, Special number).(英译本：The determination of the coordinates of cities, Beirut, 1967).

[4] Al-Bīrūnī, Kitāb fī tahqīq ma li'l-Hind (India), London, 1888(英译本：Al-Beruni's India, 2 Vols, London, 1910).

研究文献

[5] E. Browne, A Literary history of Persia, Cambridge, 1928.

[6] M. Krause, Al-Biruni, ein iranischer Forscher des Mittelalters *Der Islam*, 26(1940), pp. 1—15.

[7] А. Юшкевич, История математики в средние века, Москва, 1961, pp. 287—289, 297—299.

[8] J. Berggren, Episodes in the mathematics of medieval Islam, Springer-Verlag, New York, 1986, pp. 141—143.

奥马海亚姆

梁 宗 巨

（辽宁师范大学）

奥马海亚姆(Omar Khayyam) 1048年(?)5月15日生于霍腊散（Khorāsān，今伊朗东北部一省）内沙布尔(Nīshāpūr，即 Neyshābūr)；1131年(?)12月4日卒于内沙布尔。数学、天文学、哲学、诗歌。

奥马海亚姆的全名是吉亚斯丁·阿布·法斯·奥马·本·伊卜拉欣·内沙布里（Ghiyāth al-Dīn abu'l-Fath 'Umar ibn Ibrāhīm al-Nīsābūrī）。从他的名字可以知道他的家族大致情况[1)]。父亲是伊卜拉欣，有一个儿子名法斯，奥马('Umar 也拼作 Omar)是他自己的名字，吉亚斯丁（Ghiyāth al-Dīn）原意是"信仰的帮助"，是后来获得的尊称，内沙布里表明他来自内沙布尔或籍贯是内沙布尔。西方人更多地称他为奥马海亚姆或海亚米（al-Khayyāmī），"海亚姆"是制造或经营帐篷的职业，说明他的父亲或祖辈是从事这种工作的。

奥马出生之前，西亚地区政局动荡不安。11—12世纪，塞尔柱（Seljuk）突厥人（Turk）在那里建立一个庞大但不稳固的军事帝国，占有两河流域和现在的伊朗、叙利亚、巴勒斯坦、格鲁吉亚、亚美尼亚等地。奥马早年在家乡受教育，以后成为一名家庭教师，生活是清苦的，没有很多闲暇去从事科学研究。奥马在他的《代数学》中写道："我不能集中精力去学习这种'代数学'，时局的变

1) ibn（伊本，在名字中可简译为本）表示是谁的儿子；abu（阿布）表示是谁的父亲。

乱阻碍着我,……。"尽管如此,奥马仍然写出了颇有价值的《算术问题》(Problems of arithmetic)和一本关于音乐的小册子。

1070年左右，奥马来到撒马尔罕(Samarkand，今属乌兹别克)。在当地统治者阿布·塔希尔(Abū Ṭāhir)的庇护下,奥马写成他的主要代数著作《还原与对消问题的论证》(Risāla fi'l-barāhīn 'alā masā'il al-jabr wa'l-muqābala, Treatise on demonstration of problems of algebra and almuqabala),简称《代数学》。不久,他又接受塞尔柱苏丹(Sultan，最高统治者的称号)杰拉勒丁·马利克沙(Jalāl al-Dīn Malik-shāh, 1055—1092)和他的大臣尼赞·穆勒克(Niẓām al-Mulk)的邀请,前往伊斯法罕(Isfahan,今伊朗西部),管理那里的天文台，进行历法改革。他在那里工作了18年之久。这是他一生中最安谧的日子。

1092年,政治气候突变,马利克沙去世,庇护人尼赞·穆勒克遭到暗杀，奥马备受冷遇。马利克沙的第二个妻子土坎·哈通(Turkān-Khātūn)接替执政二年，对奥马很不友善，撤消了天文台的资助,研究工作被迫停止,历法改革半途而废。奥马虽已失去昔日的恩宠,但仍留在塞尔柱的宫廷里,尽力劝说马利克沙的继承者重新支持天文台和开展一般的科学研究。他描述伊朗古代的统治者宽宏大量,尊重学者,致力于兴办教育,发展科学,为文化事业立下不朽的功勋。

奥马始终未能说服当权者。1118年,马利克沙的第三子桑贾尔(Mu'izz ad-Dīn Sanjar,1184?—1157)登上王位。奥马离开伊斯法罕,到塞尔柱王朝的新首都梅尔夫[Merv,今马雷(Мары),属土库曼]. 他和弟子们一起写了《智慧的天平》(Balance of wisdoms)等书,研究如何利用金属比重去确定合金的成分,所用方法是纯粹代数的。这问题源出于阿基米德的研究。

奥马是一个渊博的科学家，但在西方却以诗人而闻名。他写了很多四行诗(quatrain),其中透露出无神论的自由思想。这在他的一生中导致很多麻烦。晚年的时候,他甚至到麦加去朝觐,力

图洗刷人们对他的无神论的指控。

历法改革

奥马在伊斯法罕期间，领导一批天文学家编制天文表，为了纪念庇护人，定名为《马利克沙天文表》(Zīj Malik-shāhī, Malik-shāh Astronomical Tables)，现在只有一小部分流传下来，其中包括黄道坐标表和 100 颗最亮星的星表等。

天文台更重要的工作是进行历法改革。波斯地区自古以来就使用阳历，公元前 1 世纪施行琐罗亚斯德教 (Zoroaster，中国史称祆教、拜火教)的阳历，定一年为 365 天，分 12 个月。萨珊 (Sāsān) 王朝(公元226—621年)定阳历为官历。阿拉伯人征服这个地区以后，实行伊斯兰教的阴历。这种历分一年为 12 个月，6 个大月，6 个小月，大月 30 天，小月 29 天，全年 354 天。闰年增加一个闰日成为 355 天，30 年加 11 个闰日。阴历一年和实际的回归年 365 2422日相差约11天，因此和四季是不合拍的，这对农业很不方便。奥马时代，波斯人继续使用传统的阳历，但因置闰的方法不精，渐渐产生误差。有识之士看到，历法要符合天时，必须进行根本的改革。

马利克沙执政后，在伊斯法罕兴建天文台，聘请以奥马为首的一群天文学家去完成改革的任务。奥马提出在平年 365 天的基础上，每 33 年增加 8 个闰日，即平均历年长 $365\frac{8}{33}=365.\dot{2}\dot{4}$ 日。这与实际的回归年 365.2422 日仅相差 19.37 秒钟，积 4460 年才差 1 天。而现行的公历(格里历)400 年置 97 个闰日，历年长 365.2425 日，3333 年差 1 天。

值得注意的是，如将 0.2422 展成连分数，可知各个渐近分数是

$$\frac{1}{4},\ \frac{7}{29},\ \frac{8}{33},\ \frac{31}{128},\ \frac{132}{545},\cdots$$

第 1 个分数 $\frac{1}{4}$ 相当于每 4 年加 1 个闰日，这就是儒略历所用的闰法，每 128 年差 1 天。第 2 个分数是 29 年 7 闰，1218 年差 1

天．根据有理逼近的理论，比奥马闰法(33年8闰)更精密的闰法有95年23闰，1万年以上才差1天．如果限定周期小于95年，那么33年8闰就是最佳的选择．这表明奥马有较高的理论水平。他以1079年3月16日为历法的起点，定名为“马利克纪元”(Malikī era)或“杰拉勒纪元”(Jalālī era)．可惜改历工作随着领导人的死亡而夭折．

伊斯兰教的阴历主要用于宗教，它最大的缺点是和寒暑完全脱节，夏天有时在1月，有时在6月．而奥马改革后的阳历和四季是一致的．他对此颇感欣慰，曾作四行诗以咏其事：

啊，人们说我的推算高明，
我曾经把旧历的岁时改正——
谁知道那只是从历书之中
消去未生的明日和已死的昨晨．(文献[2]，p.59)

开高次方根

奥马在《代数学》一书中写道：“印度人有他们自己的开平方、开立方方法，……我写过一本书，证明他们的方法是正确的．我并加以推广，可以求平方的平方、平方的立方、立方的立方等高次方根．这些代数的证明仅仅以《几何原本》的代数部分为根据．”

这里所说他写的书可能就是《算术问题》．现在莱顿大学藏有奥马著作的手稿，但只有《算术问题》的封面，内容已遗失．

奥马所了解的“印度算法”，实际来自两本较早的书．一本是吉利(Kushyār ibn Labbān al-Jīlī)的《印度计算原理》(Principles of Hindu reckoning)；另一本是奈塞维(‘Alī ibn Aḥmad al-Nasawī)的《印度计算必备》(Things sufficient to understand Hindu reckoning)．然而这些书所记述的开平方、开立方法和印度文献所载的相去颇远，倒是和中国古代的方法密近．中国的《九章算术》早已给出开平方、开立方的完整法则，并推广用于方程的数值解．伊斯兰数学很可能受到中国直接或间接的影响，因为自古以来丝绸之路就是中国和中亚的交通要道．不过由于他们使用

了 10 个印度数码，于是被误认为“印度算法”。

在现存的阿拉伯文献中，最早系统地给出自然数开高次方一般法则的是纳西尔丁（Naṣir ad-Dīn al-Ṭūsī，也称图斯）编纂的《算板与沙盘算术方法集成》(Collection on arithmetic by means of board and dust)。他没有指出发明者，但他非常熟悉奥马的工作，故很可能来自奥马。

用圆锥曲线解三次方程

中世纪的阿拉伯数学家对圆锥曲线作了很多探索。最值得称道的是奥马海亚姆用圆锥曲线来解三次方程。这种方法可以溯源于希腊的门奈赫莫斯（Menaechmus），事实上他就是为了解决倍立方问题(相当于三次方程 $x^3=2a^3$)而发现圆锥曲线的。后来阿基米德在《论球与圆柱》（On the sphere and cylinder）卷 2 命题 4 提出这样的问题：用一平面把球截成两部分，使这两部分的体积成定比。这问题导致三次方程

$$x^2(a-x)=bc^2.$$

解法的要点是求两条圆锥曲线的交点，一条是双曲线 $(a-x)y=ab$，另一条是抛物线 $ax^2=c^2y$。

阿基米德的“平面截球问题”引起阿拉伯数学家的极大兴趣。巴格达的马哈尼（al-Māhānī）最先试图用代数方法去解，但没有成功。后来哈津（Abū Jaʿfar al-Khāzin）用圆锥曲线来解。研究这问题的还有库希(al-Kuhi)、伊本·海塞姆(Ibn al-Haytham)、艾布尔·朱德（Abu'l Jud）等。

奥马的功劳，在于考虑了所有形式的三次方程。由于他只取正根，系数也只限于正数，因此三次方程有各种不同的类型。他将一、二、三次方程归结为 25 类，属于三次方程的 14 类：缺一、二次项的 $x^3=a$；缺二次项的 3 类：$x^3+bx=a$，$x^3+a=bx$，$bx+a=x^3$；缺一次项的 3 类：$x^3+cx^2=a$，$x^3+a=cx^2$，$cx^2+a=x^3$；不缺项的 7 类：$x^3+cx^2+bx=a$，$x^3+cx^2+a=bx$，$x^3+bx+a=cx^2$，$cx^2+bx+a=x^3$，$x^3+cx^2=bx+a$，$x^3+bx=$

$cx^2+a, x^3+a=cx^2+bx$.

每一类都给出几何解法，即用两条圆锥曲线的交点来确定方程的根。奥马在《代数学》中，专门阐述了方程的几何解法。1851年，F. 韦普克（Woepcke）将此书从阿拉伯文译成法文，书名为《奥马海亚姆代数学》(L'algèbre d'Omar Alkhayyāmī)。以后又有 D. S. 卡西尔（Kasir）英译校订本《奥马海亚姆代数学》(The algebra of Omar Khayyam, 1931)。下面取出其中的一个例子，用现代术语和符号来分析奥马的方法（文献[1], p.75）。

要解的方程是

$$x^3+ax=b. \tag{1}$$

按照希腊人的观点，将一个数看作一个线段，那么两个数之积就是矩形，三个数之积是长方体。同维数的量才能相加，所以先将方程改成齐次的形式

$$x^3+c^2x=c^2h. \tag{2}$$

右端 c^2h 表示一个以 c,c,h 为边的长方体。

用解析几何的语言来说，方程(2)的根就是抛物线

$$x^2=cy \tag{3}$$

和半圆周

$$y^2=x(h-x) \tag{4}$$

交点的横坐标 x。因为从(3),(4)两式消去 y，就得到(2)。

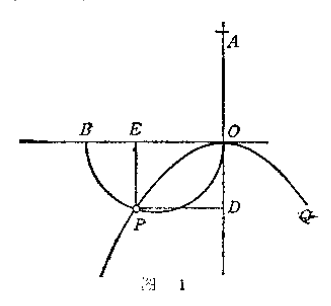


图 1

此题在原书中是第6章第1题，完全用文字叙述，没有方程的形式。方程(2)表述为"立方与边(根)等于一个数"。解题的步骤是：以 $BO=h$ 为直径作半圆 BPO，作 $AOD\perp BO$，以O为顶点，$OA=C$ 为"参数"（正焦弦）作抛物线 POQ 交半圆周于 P，作 $PD\perp AD$, $PE\perp BO$，则 PD 就是(2)的根（图1）。

事实上,记 $PD=x, PE=y$, 在半圆内,

$$PE^2=y^2=EO\cdot BE=PD\cdot BE=x(h-x),$$

根据抛物线的性质,

$$PD^2=x^2=OA\cdot PE=cy,$$

这正是(3),(4)两式.

奥马曾探索过三次方程的算术(代数)解法，但没有成功. 他在《代数学》中写道:"对于那些不仅含有常数项、一次项、二次项的方程,也许后人能够给出算术解法". 经过几百年的努力,三、四次方程的一般代数解法直到 16 世纪才由意大利数学家给出,五次以上方程的可解性问题到 19 世纪才解决[1].

奥马发展了欧几里得的几何代数学，使几何与代数更紧密地联系起来,这是一项重要的贡献. 可惜在 1851 年韦普克的译本出现之前,欧洲人几乎完全不知道他的工作(尽管在 18 世纪已有一些零星的介绍),否则解析几何的发现和推进会更加迅速.

用现代的观点看,如果引入负数并承认负根,三次方程可以写成统一的形式

$$x^3+ax^2+bx+c=0, \tag{5}$$

不必如此烦琐地分类. 以

$$x^2=py \tag{6}$$

代人(5),得到

$$pxy+apy+b^2x+c^3=0. \tag{7}$$

(6)是抛物线,(7)是双曲线. 作出这两条线，交点的横坐标便是(5)的根.

对《几何原本》的研究

奥马在欧几里得几何的研究方面有两项贡献，一是对平行公设的试证,二是对比与比例提出新的见解.

---

1) 有些书上说奥马断言三次方程的算术解法不可能有,只能用几何(圆锥曲线)去解.(文献[8], p. 269; [11],p. 194 .)这些书的说法不确切.

早在9世纪,当欧几里得《几何原本》传入伊斯兰国家后,第五公设就引起学者们的注意。所谓第五公设或平行公设就是在《原本》中提出的公理:"如果一直线和两直线相交,所构成的两个同旁内角之和小于两直角,那么,把这两直线延长,它们一定在那两内角的一侧相交."这公设不论在词句或内容方面都比其他四个公设复杂得多,而且也不那么显而易见。人们自然会发生是否可以证明的疑问。

阿拉伯学者对此公设进行试证的有焦赫里(al-Jawharī),塔比伊本库拉(Thābit ibn Qurra),伊本海塞姆(Ibn al-Haytham,即Alhazen),奥马海亚姆等人。实质上他们并没有证明了公设,而是采用另外一些与之等价的公设来代替它。

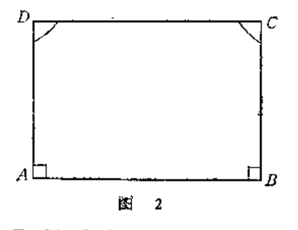


图 2

奥马在1077年撰写了《辩明欧几里得公设中的难点》(Explanation of the difficulties in the postulates of Euclid)一书,讨论了两个难题,一是平行公设,二是比的问题。他考察四边形 $ABCD$,DA 与 CB 同垂直于 AB 且 $DA=CB$(图2)。无需用平行公设,很容易证明$\angle C=\angle D$。而$\angle C$,$\angle D$ 的大小有三种可能:(1)等于直角;(2)等于钝角;(3)等于锐角。若采用平行公设,可以证明 $\angle C$,$\angle D$ 等于直角。反之,若能证明 $\angle C$,$\angle D$ 等于直角,便可推出平行公设。奥马用反证法,"证明"钝角、锐角假设必导致矛盾,因此只有直角的情形成立,这就无异证明了平行公设。但他的证明是有缺陷的,实际是引入下述假设来代替平行公设:两条直线如果越来越接近,那么它们必定在这个方向上相交。所以他也未解决平行公设问题。

18世纪时,G. 萨凯里(Saccheri)重新研究这个四边形(后人常称之为"萨凯里四边形"),由此得出一系列互不矛盾的命题。他和前人虽然未建立(也未意识到)非欧几何,但已为非欧几何的诞

生铺平了道路.

比与比例也是奥马研究的中心问题. 早在公元前5世纪，毕达哥拉斯学派就建立过比例论,不过只限于可公度量. 如果 A,B 两个量可公度,即存在正整数 m,n,使得 $mA=nB$,则

$$A:B=\frac{A}{B}=\frac{n}{m}$$

就是一个数. 但若 A,B 不可公度,他们便认为 A 与 B 无法相比. 这样就很难建立一切量的比例论. 欧多克索斯(Eudoxus of Cnidus) 为了摆脱这一困难,另立"比"的定义: 如果一个量加大若干倍之后就可以大于另一个量，则说这两个量有一个"比". 接着定义"比例": 设有 A,B,C,D 4个量,A 与 C,B 与 D 分别乘以同样的倍数 m,n,如果

$$\text{由 } mA \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} nB \text{ 可推出 } mC \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} nD,$$

则说两个比 $A:B$ 与 $C:D$ 相等，即4个量可构成比例 $A:B=C:D$.

欧多克索斯采取这一定义是煞费苦心的，这样可回避无公度的麻烦，由此出发完成了适用于一切量的比例论. 欧几里得将欧多克索斯的理论编入《原本》成为卷 V. 伊斯兰学者并不怀疑比例论的真理性，而是对其立论的出发点即比例的定义持有异议. 最先提出新定义的是马哈尼 (al-Māhānī), 他的思路可用现代术语表述如下: 将 A/B 及 C/D 展开成连分数,$A/B=(q_1,q_2,\cdots,q_n,\cdots)$,$C/D=(q_1',q_2',\cdots,q_n',\cdots)$,其中 $q_i,q_i'(i=1,2,\cdots)$是各个偏商. 如果 $q_i=q_i'(i=1,2,\cdots)$ 则称 A,B,C,D 成比例,即 $A/B=C/D$. 马哈尼认为这定义能更好地揭露比例的本质. 它适用于可公度量与不可公度量,在可公度的情况, n 是有限的.

奥马论证了这种定义和《原本》中比例定义的等价性，进而研究比及比例的若干性质，对伊斯兰数学和西方数学都有重要的影响.

另一方面,希腊人虽然承认无公度的两个量 A,B 有比,但始

终不承认 A/B 是一个数(即无理数)，这就大大妨碍了数学的发展。奥马勇敢地冲破这一桎梏，主张扩大数系，将无公度量的比接纳在内。例如 2 的平方根，圆周长与直径的比等等，应该考虑为一种新的数。这在思想上是一次不寻常的飞跃，是建立实数系的先声。然而直到 19 世纪才真正实现了他的理想。

四行诗

四行诗很像中国的绝句，每首四行，第一、二、四行押韵。奥马究竟写了多少首四行诗，没有准确的数字。剑桥大学图书馆藏有最早的(1208 年)手抄本，收入 252 首。而在他名义下出版的波斯文诗集多达 1069 首。但有人考证只有一百多首确实是他作的。1859 年，英国诗人非茨杰拉德(Edward Fitz Gerald)将 75 首译成英文，取名"Rubáiyát of Omar Khayyam"，广为流传。郭沫若于 1928 年将英译本译成中文，题名《鲁拜集》。(鲁拜是阿拉伯语，意为四行诗。)

奥马曾写过几种哲学著作，他的四行诗也包含很多哲理，其中表露的思想相当复杂。很难作出一致的评价。一方面，诗作的可靠性问题众说纷纭；另一方面，在官方的示意下有时很难畅所欲言。因此对他的议论褒贬不一，毁誉参半。总的来说，他不囿于伊斯兰教所宣扬的真主创造世界的观点，对窒息学术探讨的社会环境表示不满。正统的穆斯林不喜欢他，但广大读者爱读他的诗，从中得到启迪，进而探索人生的真谛。后人为了纪念他，1934 年由多国集资，在内沙布尔为他修建了一座高大的陵墓。

文　献

原始文献

[1] D. S. Kasir, The algebra of Omar Khayyam, Columbia University, 1931.

[2] 莪默·伽亚谟 (Omar Khayyam) 著，郭沫若译，鲁拜集 (Rubáiyát)，人民文学出版社，1978.

[3] Омар Хайям, Математические трактаты, пер. Б.А. Розенфельда, примеч. Б. А. Розенфельда и А.П. Юшкевича, Историко-математ.

ические исследования, вып. 6, 1953.
[4] F. Woepcke, L'algèbre d'Omar Alkhayyāmi Paris, 1951.

研究文献

[5] А.П. Юшкевич, История математики в средние века, Москва,1961.
[6] J. L. Berggren, Episodes in the mathematics of medieval Islam, Springer-Verlag, 1986.
[7] B. L. van der Waerden, A history of algebra, Springer-Verlag,1985.
[8] C. B. Boyer and U. C. Merzbach, A history of mathematics, John Wiley & Sons, 1989.
[9] D.E. Smith, Euclid, Omar Khayyam and Saccheri, *Scripta Mathematica*, 3(1935), 1, pp. 5—10.
[10] D.J. Struik, Omar Khayyam, mathematician, *Mathematical Teacher*, 1958, 4, pp. 280—285.
[11] M. Kline, Mathematical thought from ancient to modern times, Oxford University Press, 1972 (中译本：M. 克莱因，古今数学思想，上海科学技术出版社，1979)。

婆什迦罗

陈 一 心

（湖南科学技术出版社）

婆什迦罗（Bhāskara） 1114 年生于印度南部的比杜尔；约 1185 年卒于印度乌贾因。数学、天文学。

婆什迦罗的父亲是正统的婆罗门教徒，曾写过一本很流行的占星术著作。婆什迦罗长期在乌贾因（Ujjain）工作，是乌贾因天文台的主持人。

从印度数学的发展来看，到 12 世纪已经积累了相当多的成果。婆什迦罗通过吸收和改进这些成果，并加以进一步研究，其成就又高出前人一筹。他在文学上的造诣也很深，其著作显示出较高的诗作技巧。

婆什迦罗的著作至少有 6 种：

（1）《丽罗娃提》（Līlāvati）；

（2）《算法本源》（Bījagaṇita）；

（3）《天文系统极致》（Siddhāntaśiromaṇi，写于 1150 年）；

（4）《关于天文系统极致的研究》（Vāsanābhāsya on the Siddhāntaśiromaṇi）；

（5）《探索珍奇》（Karaṇakutūhala，写于 1183 年）；

（6）《关于拉纳的〈锡亚赫迪达坦罗〉的注释》（Vivaraṇa on the Śisyadhīvṛddhidatantra of Lalla）。

有人认为《丽罗娃提》和《算法本源》是《天文系统极致》的两个部分。还有一本叫《比却帕纳亚》（Bījopanaya 的译音）的书，是否为婆什迦罗的著作，尚无定论。

《丽罗娃提》和《算法本源》是两部重要的数学著作，代表着

1000—1500 年间印度数学的最高水平。 婆什迦罗汇编了来自婆罗摩笈多 (Brahmagupta) 和施里德哈勒 (Sridhara) 等数学家的问题，并填补了他的前辈著作中的许多不足。

关于书名"丽罗娃提"，流行着一个故事：婆什迦罗的女儿名叫丽罗娃提，由占卜得知，她结婚后将有灾祸降临。按照婆什迦罗的计算，如果婚礼在某一时辰举行，灾祸便可以避免。 到了那天，正当新娘等待着"时刻杯"中的水平面下落时，一颗珍珠不知什么原因从她的头饰上掉下来，堵在杯孔上，水不再流出了，从而无法测定出准确的时辰，婚礼没能如期举行。婚后不久，丽罗娃提便失去了丈夫。为了安慰她，婆什迦罗教她算术，并以她的名字命名自己的著作。

《丽罗娃提》分为 13 章，从一个信徒向神祈祷开始展开全书。第 1 章给出了几个计算表；第 2 章讲述整数和分数运算，包括计算平方根和立方根，使用了 10 进制记数法；第 3 章介绍算术中的反演法、试位法等技巧；第 4 章讲解来自希腊和中国的应用问题； 第 5 章给出某些算术级数的求和法；第 6—11 章是几何学，主要讲面积和体积的计算和可以化为一次方程的实际问题；第 12 章讲述不定方程；第 13 章涉及组合学的内容。《算法本源》主要是关于代数的，由 8 章组成。第 1 章讲述正负数法则； 第 2—3 章讲整系数一次和二次不定方程的解法；第 4 章讲线性方程组；第 5 章研究二次方程，并给出勾股定理的两个证明；第 6 章包含一些线性不定方程组的实例；第 7—8 章补充了二次不定方程的内容。

印度人对代数学的一大贡献是采用缩写文字和符号来表示未知数和运算，婆什迦罗上述两本书就是这方面的代表作。书中给出了零的运算法则，有 $a+0=a, a-0=a, a\times 0=0, \sqrt{0}=0$，等等。但他给出的 $(a/0)\times 0=a$ 是错误的。 值得注意的是，在《算法本源》中，婆什迦罗引入了一个朴素粗糙的无穷大概念。他写道： "一个数除以零便成为一个分母是符号 0 的分数。例如 3 除以 0 得 3 / 0。这个分母是符号 0 的分数，称为无穷大量。在这个以符号 0 作为分母的量中，可以加入或取出任何量而无任何

变化发生，就像在世界毁灭或创造世界的时候，那个无穷的、永恒的上帝没有发生任何变化一样，虽然有大量的各种生物被吞没或产生出来。"婆什迦罗在天文学研究中还得出 $\frac{a\times 0}{b\times 0}=\frac{a}{b}$，这已经进入无穷小运算的领域了。婆什迦罗的几何工作主要以婆罗摩笈多的工作为基础。例如

球的表面积 $=4\times$ 圆面积，

球的体积 $=$ 球的表面积 $\times\frac{1}{6}$ 直径，

等等。 在《丽罗娃提》中还有许多直角三角形和相似三角形问题，例如：

（1）直立在地面上的一支长 32 腕尺（腕尺为印度古代一种量度单位，即从肘至中指端之长，约 18—22 英寸）的竹子被风吹折，其末端在距根部 16 腕尺处触地，问折断后的竹高为多少？

解：如图 1，竹高 $=AB=32$，$AD=16$，C 为竹折断之点。若 $AC=x$，则 $BC=CD=32-x$。故 $x^2+16^2=(32-x)^2$，$x=12$。

（2）一朵荷花露出水面 1 掌尺 $\left(=\frac{1}{2}\text{ 腕尺}\right)$，被风吹倒，在距原露出点 2 腕尺远处没于水中。问池中水深多少？

解：如图 2，$AB=$ 荷花长，$AC=$ 水深，故 $BC=\frac{1}{2}$。若 AC

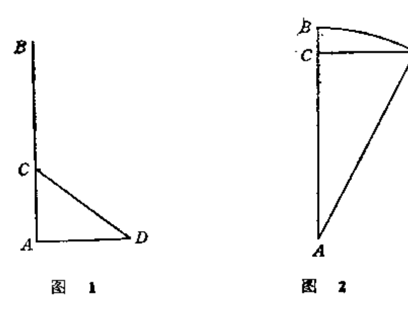


图 1　　　　图 2

$=x$,则$AB=AD=x+\frac{1}{2}$. 故 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=x^2+4$, $x=3\frac{3}{4}$(腕尺). 与前一问题相类似的题目曾出现在婆罗摩笈多的《不定方程讲义》中,可见婆什迦罗受到婆罗摩笈多的影响. 值得注意的是,上述两个问题与中国1世纪时的数学名著《九章算术》"勾股卷"中的"葭生池中央"、"折竹"等问题只是数据不同, 似乎同出一源.

《丽罗娃提》给出了平截头台的体积公式. 若上、下底面为长方形,分别以 a, b 和 a',b' 为边,则该平截头台的体积$=\frac{1}{6}h[ab+a'b'+(a+a')(b+b')]$. 它在公元前1800年左右便载入古埃及数学著作"莫斯科纸草书"中, 中国的《九章算术》和婆罗摩笈多的著作也给出了这一公式.

婆什迦罗对排列问题进行了深入的研究, 提出定理: r 个元素中, k 个属于一类, l 个属于另一类, 这 r 个元素的排列数为 $\frac{r!}{k!l!}$.

希腊人最早发现了不可通约量,但是长期不承认无理数是数. 婆什迦罗和其他一些印度数学家打破了无理数与有理数之间的森严界限. 他们广泛地使用无理数,在运算中和有理数作同一处理,而两者之间的鸿沟,似乎置若罔闻.

在《算法本源》中,婆什迦罗比较全面地讨论了负数,把负数叫做"负债"或"损失",并在数码上加小点来表示. 如 $\dot{3}$ 表示-3. 他正确地叙述了负数的运算法则: "正数、负数的平方, 常为正数; 正数的平方根有两个,一正一负;负数无平方根, 因为它不是一个平方数."

婆什迦罗对一次和二次方程的讨论比其他印度数学家详尽, 同时也大大超过了希腊的丢番图 (Diophantus). 《算法本源》中还有一个三次方程和一个双二次方程的例子. 婆什迦罗承认二次方程有两个根, 但将负根弃去不取. 譬如指出 $x=50$ 和 $x=-5$ 都是 $x^2-45x=250$ 的根, 但接着说: "本例的第二值不适

宜，故弃去，因为人们不赞成负根.”

印度传统的解不定方程的法则——库塔卡法则经婆什迦罗之手也得到改进和推广. 他指出，若$x=\alpha$，$y=\beta$是不定方程 $ax+c=by$ 的解，则 (α',β') 也是该方程的解，这里 $\alpha'\equiv\alpha(\mathrm{mod}\, b)$，$\beta'\equiv\beta(\mathrm{mod}\, a)$；若 $x=\alpha$，$y=\beta$ 为 $ax+c=by$ 的一组解，则 $x=\alpha-b$，$y=a-\beta$ 是方程 $ax+by+c=0$ 的解.

婆什迦罗最有独创性的工作是他对婆罗摩笈多关于不定方程 $Nx^2+1=y^2$ 解法的改进. 改进后的方法称为圆过程（cyclic process），其内容为：对任意适合的 K，取 a,b，使得 $Na^2+K=b^2$，另外，$N\cdot 1^2+(m^2-N)=m^2$，在 (a,b,K) 和 $(1,m,m^2-N)$ 间应用婆罗摩笈多引理，可得

$$N\left(\frac{am+b}{K}\right)^2+\frac{m^2-N}{K}=\left(\frac{bm+Na}{K}\right)^2.$$

利用库塔卡法，选定m使 $am+b$ 可被K整除，且使 m^2-N 在数值上是较小的. 作

$$\frac{am+b}{K}=a_1,\ \frac{m^2-N}{K}=K_1,\ \frac{bm+Na}{K}=b_1,$$

婆什迦罗指出：若 a_1 为一整数，b_1 和 K_1 也是整数（婆什迦罗定理1）. 于是可得 $Na_1^2+K_1=b_1^2$. 以 a_1,b_1,K替代 a,b,K，重复上述过程，得到另一组整数 a_2,b_2,K，使 $Na_2^2+K_2=b_2^2$. 婆什迦罗又指出：重复上述过程有限次后，可得 $N\alpha^2+l=\beta^2$，其中 $l=\pm1$，±2 或±4(婆什迦罗定理 2). 再按照婆罗摩笈多的解法，可得出原方程 $Nx^2+1=y^2$ 的整数解. 对于上述的两个定理，婆什迦罗没有给出证明. 他比较注重 $Nx^2+1=y^2$ 型方程的应用，用其解更一般的二次方程.

方程 $Nx^2+1=y^2$ 的解法称为婆罗摩笈多-婆什迦罗法则，它得到许多数学史家的高度评价.

婆什迦罗在天文学研究中，也对三角学的发展作出了贡献. 在《天文系统极致》第三部分里，他给出了下面一些三角学公式：

$$\sin(A\pm B)=\sin A\cos B\pm\cos A\sin B;$$

$$\sin\frac{A-B}{2}=\frac{1}{2}[(\sin A+\sin B)^2+(\cos A-\cos B)^2]^{\frac{1}{2}};$$

$$\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}R;\ \sin 36^\circ=\sqrt{\frac{5R^2-\sqrt{5R^4}}{8}},$$

其中R为圆半径.

在世界数学史上,微积分学经过了漫长而曲折的发展历程.在微积分学创始人 I. 牛顿 (Newton) 和 G.W. 莱布尼茨(Leibniz)以前，古希腊数学家阿基米德 (Archimedes) 和中国古代数学家刘徽就在计算面积和体积的法则中,表现出朴素的积分学思想.婆什迦罗也运用类似的法则求球体的表面积和体积. 为了计算球体的表面积，婆什迦罗采用两种方法. 第一种方法是用一系列平行圆把表面积分划成许多基本的圆环，这一系列半径不同的平行圆是取表面上的任意点作圆心的，平行圆的数目可以任意多. 但为了易于计算，应该有已知的正弦数目那么多，基本圆环的面积的和便给出球体的表面积. 第二种方法是用过球极点的子午圈把球表面分划成许多基本的弓形，每一个弓形再被平行于赤道圈的圆圈分划成许多基本的四边形. 这些四边形面积的和给出弓形的面积,所有这些弓形面积的和给出球体的表面积. 为了求得球体积，婆什迦罗利用一系列顶点在球心底面在球表面上且其面积为单位面积的小棱锥,这些棱锥体积的和便给出球的体积.

婆什迦罗在天文学研究中表现出丰富的微分学思想. 他为了准确地掌握行星的运动规律,引入了“瞬时法则”,即把一天分为许多小的时间间隔,比较行星在相继时间间隔末的运动位置. 若y和 y' 是行星在相继时间间隔末的平均近点距离， 婆什迦罗给出

$$\sin y'-\sin y=(y'-y)\cos y.$$

但这一成果在印度可能还不算最早的. 按照 B. B. 达塔(Datta)的说法,印度的门雅那 (Munjala， 公元 932 年) 及其著作的评注者卜拉沙斯底达拉 (Prashastidhara,公元 958 年)就已悟出了这一结论.

婆什迦罗还得出结论：“行星的运动在哪里是个极值，在哪

里的运动就将是平稳的.”“在逆行的起始和结尾，行星的明显运动消失了.”这里包含了导数在函数的极值处等于零以及罗尔(Rolle)定理的概念.

婆什迦罗的其他几本著作是关于天文学研究的.《天文系统极致》含数理天文学与天体理论两部分,包括行星的平黄经及真黄经、与周日运动有关的三问题、朔望、月食、日食、行星的偕日升落、宇宙结构、行星平均运动原理、行星的离心-周转圆模型、球面三角学原理、天文仪器等专章.这本著作对印度天文学的发展影响很深.婆什迦罗提出了自己的宇宙理论,认为地球居于宇宙之中,靠自己的力量固定于空中;他认为地球上有七重气，分别推动月亮、太阳和行星运动；并认为天体视直径大小的变化是由于它们离开地球远近不同;他甚至还认识到地球具有引力.《关于天文系统极致的研究》是婆什迦罗自己对《天文系统极致》的注解.《探索珍奇》给出了解天文问题的法则,它们比《天文系统极致》给出的法则更为简单.《关于拉纳的〈锡亚赫迪达坦罗〉的注释》有三本手稿,分别存于贝拿勒斯、比卡内尔和乌贾因,尚未出版.

婆什迦罗的著作在印度有很高的地位.在马哈拉施特拉邦的巴特那，发现有关于婆什迦罗的一块重要碑刻.碑文上记载着1207年8月9日当地权贵提供给一个教育机构一笔捐款，这笔捐款是资助学者们研究婆什迦罗著作的（从研究《天文系统极致》开始).按照莫卧儿帝国皇帝阿克拔（Akbar）的旨意,《丽罗娃提》、《算法本源》等都被译为波斯文，这些译本分别于1587年和1634年出版.婆什迦罗的嫡孙曾创立了一个专门研究《天文系统极致》的学派,以后的400多年间,有许多学者对此书进行了注释.

文　　献

原始文献

[1] Bhāskara II, Līlavatī (Sanskrit text): 1. Calcutta, 1832; 2. With Sanskrit and Hindi commentaries of Laṣaṇa Lāla Jhā, edited by Sureśa Sarman, as Vidyābhavana Saṃskṛta Granthamālā Series, no. 62, Benares, 1961.

[2] H. T. Colebrooke, Algebra, with arithmetic and mensuration: from

the sanscrit of Brahmegupta and Bhâscara, London, 1817.
[3] Bhāskara II, Bījagaṇita (Sanskrit text): 1. Calcutta, 1834; 2. Edited, with the Bījapallava of Kṛṣṇa, by T. V. Rādhākṛṣṇa Śāstrin, as Tanjore Sarasvati Mahal Series, no. 78, Tanjore, 1958.

研究文献

[4] David Pingree, Sanskrit astronomical tables in the United States, *Transactions of the American Philosophical Society*, 58(1968), 3, pp. 36—37.
[5] B. Datta and A. N. Singh, History of Hindu mathematics, Asia Publishing House, Bombay, 1938.
[6] D. E. Smith, History of mathematics, Ginn and Company, Boston, 1923.
[7] A. K. Bag, Mathematical in ancient and medieval India, Chaukhambha Orientalia, Varanasi, 1979.
[8] А. П. Юшкевич, История математики в средние века, Москва, 1961.
[9] А. И. Володарский, Очерки истории средневековой индийской математики, Издательство «Наука», Москва, 1977.
[10] David Pingree, Bhāskara II, 见 Dictionary of scientific biography, Vol. 2, 1976, pp. 115—120.
[11] Brij Mohan, The terminology of Līlāvatī, *Journal of the Oriental Institute*, Baroda, 8(1958—1959), pp.159—168.
[12] D. H. Potts, Solution of a diophantine system proposed by Bhaskara, *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*, 38(1946), pp. 21—24.
[13] J. F. Scott, A history of mathematics, London, 1958 (中译本: J. F. 斯科特,数学史,商务印书馆,1981).

斐 波 那 契

欧 阳 绛

(山 西 大 学)

斐波那契，L.（Fibonacci，Leonardo） 约1175年生于意大利比萨；1250年卒于比萨．数学．

斐波那契是波那契（Bonacci）家族的成员． 这个家族在当时的比萨很有影响．斐波那契的父亲圭列尔莫（Guilielmo）作为比萨共和国的官员，于1192年左右被派往布日伊（Bougie，今属阿尔及利亚），管理比萨的商业侨民．

斐波那契受过良好的教育．22岁时随父亲到布日伊，在那里学会了用印度数码计算．后来，又随父亲到埃及、叙利亚、希腊（拜占庭）、西西里和普罗旺斯旅行；他通过广泛的学习和认真的研究，熟练掌握了多种计算技巧．

12世纪末，斐波那契回到比萨，在这里度过了四分之一个世纪．他在比萨著书立说，书中不仅用印度数码和方法进行计算，把它们应用于商业活动的所有领域，并且阐述了许多代数和几何问题．他的最重要成果表现在不定分析和数论方面，并远远超过了前人．

大约1225年，斐波那契受到国王腓德烈二世（1194—1250）的召见，成为宫庭数学家．在保存下来的一份1240年的文件上写着：由于斐波那契曾向市民和官吏讲授计算方法，每年给予他薪金若干金磅．

保存至今的斐波那契著作有5部：(1)《算盘书》(Liber abbaci，1202，1228)；(2)《实用几何》(Practica geometriae，1220，1221)；(3)《花》(Flos，1225)；(4)给帝国哲学家狄奥多鲁斯（Theo-

dorus)的一封未注明日期的信；(5)《平方数书》(Liber quadratorum, 1225). 我们知道他还有其他著作，例如关于商业算术的《小方法》(Di minor guisa). 遗憾的是他对欧几里得《几何原本》第 10 卷的评述失传了，在该书中，斐波那契以其对无理量的数值处理取代了欧几里得的几何表示. 邦孔帕尼(Boncompagni)和利布里(Libri)曾编辑整理斐波那契的著作；G. 康托尔(Cantor)、G. 洛里亚(Loria)和 A. П. 尤什克维奇(Юшкевич)对斐波那契著作的基本原理作过仔细的探讨.

1.《算盘书》

这里的"算盘"(abacus)不是指古老的算盘或沙盘，而是指一般计算. 从 13 世纪到 15 世纪，该书有过 12 种版本，但是，只有 13 世纪和 14 世纪初的 3 种版本是完整的. 该书有 15 章，分四部分.

第一部分，第 1—7 章. 斐波那契首先讲述罗马数码和指算法，然后介绍印度数码. 按照阿拉伯方式，个位"在前面"(在右边)，分数在整数的左边. 此外，他引进了分数中间的那条横杠. 计算方法是通过数值的例子讲授的，并且多用去九法核对结果(也常用去七法和去 11 法). 书中还给出把分数分解为单位分数的规则，引进了多种表示分数的符号. 例如，$\frac{6\ 2}{7\ 5}$ 即 $\frac{2}{5}+\frac{6}{7.5}$；0 $\frac{6\ 2}{7\ 5}$ 即 $\frac{2}{5}\cdot\frac{6}{7}$；$\frac{6\ 2}{7\ 5}\ 0$ 即 $\frac{2}{5}+\frac{6}{7}$；$\frac{1\ 1\ 1\ 5}{5\ 4\ 3\ 9}$ 即 $\frac{5}{9}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{5}{9}$. 最后列出许多数表，包括乘法表、素数表、因数表等.

第二部分，第 8—11 章. 这部分是与商人有关的问题，例如货物的价格、利润、物物交换、利息、工资、合股分红、货币兑换等. 其中的"百鸡问题"，可能受到中国的影响. 它实际是一个不定方程问题.

第三部分，第 12—13 章. 这部分内容最为广泛，包括许多怪题、难题. 例如：(1)"水池问题"：一只蜘蛛每天沿水池的墙向上爬若干英尺，每天晚上往回爬若干英尺，问它多长时间能爬出来？

(2)“兔和狗问题”：狗不仅往前追而且也往回跑；速度不是常数而是依算术级数增加的．问狗多长时间能追上兔？(3)“给与取问题”：有两个或多个人，他们中的一个向其他人中的一个或几个要一定数量的钱，并且知道此时这个人的钱和其他人的钱的比例，求原来的钱数．一个简单的例子是：$x+7=5(y-7)$，$y+5=7(x-5)$．(4)“求钱数问题”：两个或多个人得到一笔钱，并且知道每个人的钱占总钱数的比例，求每个人的钱数．对于3个人，有如下的表达式：① $x+b=2(y+z)$，② $y+b=3(x+z)$；③$z+b=4(x+y)$．这也是不定方程问题．还有一组更为广泛流传的问题，被称做“单独一个人不能买”，说的是：几个人中的任何一个，只有当他从别人手中得到一部分钱时，才能买到某件东西．这组题有各种变异，甚至可以涉及7个人、5匹马．以一个仅涉及3个人的问题为例，其方程可写为

$$x+\frac{y+z}{3}=y+\frac{z+x}{4}=z+\frac{x+y}{5}=S.$$

书中包含很多余数问题，例如求满足条件 $n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2,3,4,5$ 和 $6)\equiv 0(\mathrm{mod}\ 7)$的 n．另外，斐波那契还提出了一个极为有趣的“兔子问题”，即：“由一对兔子开始，一年后可以繁殖成多少对兔子？”其中假定：“每对大兔每月能生产一对小兔，而每对小兔生长两个月就成大兔．”

斐波那契在运用特殊的方法解决特殊问题方面，具有惊人的技巧；他还常常巧妙地引进辅助未知数．在其他场合，则使用一般的方法，如简单试位法，反演法，双试位法等．

书中表明，斐波那契已注意到负数．他给出了诸如 $22+(-9)=22-9$ 和 $-1+11=+10$ 的运算．

第四部分，第14，15章．第14章依印度-阿拉伯算法讲授求平方根和立方根的数值方法，与现代的方法基本一致．他已懂得在被开方数上加零，以达到更大的精确度．他还给出如下近似方法：对于 $\sqrt{A}=\sqrt{a^2+r}$，第一个近似是 $a_1=a+r/2a$，令 $r_1=a_1^2-A$，则第二个近似为 $a_2=a_1-r_1/2a_1$．对于立方根

$$\sqrt[3]{A}=\sqrt[3]{a^3+r},$$

第一个近似是

$$a_1=a+\frac{r}{(a+1)^3-a^3}=a+\frac{r}{3a^2+3a+1}.$$

对于第二个近似，斐波那契令 $r_1=A-a_1^3$,并且

$$a_2=a_1+\frac{r_1}{3a_1\cdot(a+1)}.$$

虽然纳萨维（al-Nasawi）已经知道第一个近似,但进一步的近似则是斐波那契首先发现的。他在该章中实现了欧几里得无理量的完整的运算,并且对计算的正确性给出几何式的证明。

第 15 章分 3 节。第 1 节讲比例及它们的各种变换。例如,在一个问题中给定：(1) $6:x=y:9$；(2) $x+y=21$。从 (1) 得 $xy=54$;然后利用《几何原本》第 2 卷第 5 个命题,得

$$\left(\frac{x-y}{2}\right)^2=\left(\frac{21}{2}\right)^2-54$$

和

$$x-y=15.$$

从而解得 3 和 18。 第 2 节先讲毕达哥拉斯定理的应用；然后是许多不同类型的问题,例如：给定 $3^2+4^2=25$,解不定方程 $x^2+y^2=25$。此外还有测量体积的问题,例如求各种物体$\left(\text{包括球,取 } \pi=3\frac{1}{7}\right)$沉入水中时,容器内的水会溢出多少。第 3 节给出花拉子米的六种类型的二次方程：$ax^2=bx$，$ax^2=c$，$bx=c$，$ax^2+bx=c$，$ax^2+x=bx$ 和 $ax^2=bx+c$;然后对它们作精确的数值计算。 斐波那契在这里还讲到能归结为二次方程的高次方程,例如 (1) $y=10/x$，(2) $z=y^2/x$ 和 (3) $z^2=x^2+y^2$ 被给定,就导至 $x^8+100x^4=10\,000$。当涉及几个未知数时，斐波那契以 radix 和 res 代表 x 和 y，以 pars 代表第三个未知数；有时,又把两个未知数的和定作 res;对于 x^2，用 quadratus，census 或 avere 表示;对于 x^3，用 cubus 表示；对于 x^4，用 census de censu 或 censum census 表示，等等。 常数项被称作 numerus，

denarius 或 dragma。

2.《实用几何》

这是斐波那契的第二部著作，在罗马、巴黎等地存有九个抄本。斐波那契在这部著作中不仅通俗地讲授量度问题，还讲了一些几何的证明方法。《实用几何》分 8 章，并冠以绪论。在绪论中解释基本概念以及在比萨流行的线段和面积的测量方法。第 1 章讲矩形的面积；第 2 章和第 5 章讲平方根和立方根。第 3 章为线段和平面图形(三角形、正方形、矩形、菱形、梯形、多边形和圆)的面积计算提供准确的证明；对于圆，采用阿基米得的 96 边多边形，π 取 3.141818…。此外，斐波那契还熟悉有凹角的四边形。

该书中的许多问题导致二次方程，而这些二次方程可以利用典型的公式来解决。这些问题是以言辞表述的，例如，对于 $4x - x^2 = 3$，他表述为：如果从四边的和中减去该正方形的面积，则得 3 竿。在这里，斐波那契已经注意到了双解。顺着这样的思路，他给测量员以实际指导，而且讲了使用仪器的方法，例如求三角形田地的高的垂足和在山边上田地的投影的方法，还讲到测量山边上直线的水平投影的仪器。第 4 章讲曲面的剖分（来源于欧几里得的《论剖分》）。第 6 章讨论体积（包括正多面体的体积）。第 7 章讲物体(比如树)的高的计算方法，并且给出以三角形的相似性为基础的测量规则；在这里，角由象限仪测定。第 8 章讲从外接圆和内切圆的直径计算五边形和十边形的边，及其逆运算；还讲到从面积计算边。随后有两个不定方程：$a^2 + 5 = b^2$ 和 $c^2 - 10 = d^2$。最后讲如何计算内接于等边三角形的长方形和正方形的边长(斐波那契用的是 60 进位制)。

3.《花》

这部著作是献给弗里德里克二世的，多是在宫庭举行数学竞赛时提出的问题。他给出方程 $x^2 + 5 = y^2$ 和 $x^2 - 5 = z^2$ 的解，并证明了三次方程 $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ 的解不可能是整数，不

可能是分数，也不可能是欧几里得的无理量（换句话说，没有能用直尺和圆规作出的根）；并且，他找到了一个准确到小数点后第10位的近似解 $x = 1.3688081078 5$（当时是以60进位制写出的）。我们不知道他是怎样得到这一结果的。

4. 给帝国哲学家狄奥多鲁斯的一封未注明日期的信

该信的主题是“百鸡问题”，斐波那契在《算盘书》中曾讨论过这一问题。信中推演了解不定问题的一般方法。然后讲了一个几何问题：求作一个内接于等边三角形的正五边形。斐波那契通过二次方程得到解，这是早期将代数应用于几何的典型范例。该信以一个有五个未知数的线性问题结束；斐波那契没有逻辑地构造解，而只是给出一个机械的公式。

5.《平方数书》

这部关于不定分析的、有独创性的著作，使他成为丢番图（Diophantus）和 P. de 费马（Fermat）之间在数论方面的杰出数学家。该书撰于1225年。其主题是：求 $x^2 + 5 = y^2$ 和 $x^2 - 5 = z^2$ 这两个齐次方程的解。斐波那契知道：从1开始，连续加奇数，所得和为平方数。对于奇数 a，从1到 $(a^2 - 2)$ 的奇数和为 $\left(\frac{a^2 - 1}{2}\right)^2$。如果在此表达式上再加上 a^2，则得另一个平方数 $\left(\frac{a^2 + 1}{2}\right)^2$。

斐波那契还给出下述定理：如果 $(a^2 + b^2)$ 和 $(x^2 + y^2)$ 是平方数，且 $a:b \neq x:y$，$a:b \neq y:x$，则有等式 $(a^2 + b^2) \cdot (x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (bx - ay)^2 = (ay - bx)^2 + (by - ax)^2$。然后，斐波那契引进一组特殊的数：$(a + b)$ 为偶数时，$n = ab \cdot (a + b)(a - b)$；$(a + b)$ 为奇数时，$n = 4ab(a + b)(a - b)$。他命名这样一个数为相含数（congruum），并且证明：它必定能被24整除。他发现 $x^2 + h$ 和 $x^2 - h$ 能同时是平方数，仅当 h 是相含数。例如 $5^2 + 24 = 7^2$，$5^2 - 24 = 1^2$ 和 $10^2 + 96 = 14^2$，

$10^2-96=2^2$. 对于 $a=5$ 和 $b=4$, $h=720=5\cdot 12^2$，于是得到平方数的两个差 $y^2-x^2=x^2-z^2=720$. 他确定 $2401-1681=1681-961$,或 $49^2-41^2=41^2-31^2$. 以 12^2 分之，得到

$$\left(3\frac{5}{12}\right)^2+5=\left(4\frac{4}{12}\right)^2$$

和

$$\left(3\frac{5}{12}\right)^2-5=\left(2\frac{7}{12}\right)^2.$$

斐波那契接着证明了数论中的一系列命题，例如：平方数不可能是相含数，x^2+y^2 和 x^2-y^2 不可能同时是平方数，x^4-y^4 不可能是平方数，等等. 在这类问题中，斐波那契长期处于领先地位.

纵观斐波那契的活动，应该说他在西方的数学复兴中起到了先锋作用，或者说他在东西方的数学发展中起到了桥梁作用. G. 卡尔达诺（Cardano）在讲述斐波那契的成就时说：我们可以假定，所有我们掌握的希腊之外的数学知识都是由于斐波那契的存在而得到的，他在 L. 帕奇欧里（Pacioli）以前很久，就从印度和阿拉伯取得了这些知识. 斐波那契对古代数学作了崭新的思考，并且独立地把它推向前进. 在算术方面，他显示出计算上的高超才能，并把负量和零认作数. 在几何上，他既具备欧几里得的严谨又懂得如何应用新的代数方法解几何问题.

斐波那契的数学工作对后世有深远影响. 特别值得一提的是：以《算盘书》中那个有趣的"兔子问题"为基础，后人得出著名的斐波那契数列：

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,\cdots$$

这个数列的特征是

$$u_1=u_2=1,\ u_n=u_{n-1}+u_{n-2}\ (n\geqslant 3).$$

其通项为

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

一个正整数数列,其通项竟要用无理数 $\sqrt{5}$ 来表达! 这是一个十分意外的结果。斐波那契数列有许多重要的性质和应用.例如,由于

$$\lim_{n\to\infty}(u_n/u_{n+1})=(\sqrt{5}-1)/2,$$

它便与黄金分割联系起来。1963 年创刊的《斐波那契季刊》(The Fibonacci Quarterly) 专门登载有关这个数列的最新发现。其中包括:

(1) 任何斐波那契数的平方与其两边的两个斐波那契数的乘积之差为 1.

(2) 任何两个相继的斐波那契数的平方和

$$F_n^2+F_{n+1}^2=F_{2n+1}.$$

(3) 对于任何四个相继的斐波那契数 A,B,C,D, 下列公式成立:

$$C^2-B^2=A\times D.$$

(4) 最后一位数字,每 60 个数一循环;最后两位数字,每 300 个数一循环;最后三位数字,每 1500 个数一循环; 最后四位数字,每 15000 个数一循环;最后五位数字, 每 150000 个数一循环, 等等。

(5) 每第三个数可被 2 整除,每第四个数可被 3 整除,每第五个数可被 5 整除,每第六个数可被 8 整除,等等。这些除数本身也构成斐波那契数列。

尽管斐波那契数列的通项公式和关于斐波那契数列的一系列成果是后人得到的, 但我们不能忘记: 这些数学成果都起因于斐波那契在《算盘书》中提出的兔子问题。

文　　献

原始文献

[1] L. Fibonacci, Scritti di leonardo pisano, B. Boncompagni ed., 2 vols; Rome, 1857 - 1862.

[2] Léonardde Pise, Le livre des nombres carrés, P. Ver Eecke transl. Bruges,

1952.
[3] Leonardo Fibonacci, La pratica di geometria, volgarizzata da Cristofano di Gherardo di Dino cittadino pisano, G. Arrighi transl. Pisa, 1966.

研究文献

[4] B. Boncompagni, Della vita e delle opere di Leonardo Pisano metematico del secolo decimoterzo, *Atti dell' Academia pontificia dei Nuovi Lincei*, 5(1851—1852), pp. 5—91, 208—246.
[5] B. Boncompagni, Intorno ad alcune opere di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo, notzie raccolte Rome, 1854.
[6] M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, II, Leipzig. 1913, pp. 3—53
[7] G. Loria, Leonardo Fibonacci, 见 Gli scienziati italiani, Aldo Mieli, ed., Rome, 1923, pp. 4—12.
[8] G. Sarton, Introduction tto the history of science, II, Baltimore, 1931, pp. 611—613.
[9] D. E Smith, History of mathematics. New York, 1958.
[10] A. P. Youschkevitch, Geschichte der Mathematik im Mittelater, Leipzig, 1964.

纳 西 尔 丁

王 青 建

（辽宁师范大学）

纳西尔丁（Naṣir al-Dīn al-Ṭūsī, Muḥammad ibn Muḥammad ibn al-Ḥasan） 1201 年 2 月 18 日生于波斯的图斯(Ṭūs, 今属伊朗东部霍腊散省)；1274 年 6 月 26 日卒于巴格达附近的卡济迈因（Kadhimain）．数学、天文学、逻辑学、哲学、伦理学、矿物学．

纳西尔丁也常被称为阿尔图斯（al-Ṭūsī),源于他的诞生地图斯．图斯是当时阿拉伯的文化中心之一,出现过许多知名学者．纳西尔丁的父亲是图斯伊斯兰教什叶派的法理学家．纳西尔丁早年跟随父亲学习宗教,又跟随住在同一城市的舅舅学习逻辑学、自然哲学和玄学，同时接受了代数学和几何学的教育．后来到内沙布尔（Nīshāpur）深造，受到正规教育．内沙布尔当时也是阿拉伯的主要学术中心之一，人才荟萃． 纳西尔丁的老师达马德（al-Dāmād）是阿拉伯著名哲学家、科学家伊本西那（Ibn Sīna, 拉丁名阿维森纳， Avicenna)的第 5 代门徒,因此纳西尔丁能够读到伊本西那流传下来的课本,并开始研究医学和数学,逐渐成名．

此时蒙古人正大举西进,阿拉伯帝国已到末日,人心惶惶．为了寻求宁静的学者生活，纳西尔丁应伊斯梅利（Ismāʻīlī）要塞统治者穆赫塔希姆（Muḥtashim）邀请， 于 1232 年前到了那里,辗转于库希斯坦（Quhistan)、阿拉穆特（Alamut）等要塞居住,写下一批数学、哲学、伦理学和逻辑学方面的论著．

1256 年蒙古远征首领旭烈兀（Hūlāgū 或 Hülegü,约 1217—

1265,成吉思汗之孙)征服波斯北方,占领了阿拉穆特等要塞.旭烈兀喜爱天文学,因而敬重天文学家。他将纳西尔丁收入朝中,担任科学顾问,并奉以厚薪. 1258年纳西尔丁随旭烈兀远征巴格达.后来又到过伊拉克什叶派中心城镇希拉 (Hilla, 今 Hillah) 等地. 旭烈兀建立伊儿汗国后,经旭烈兀批准,纳西尔丁于1259年在迈拉盖 (Marāgha, 今伊朗西北部大不里士城南)开始建造天文台,后担任该天文台的科学领导工作. 他招贤纳士,著书立说,使迈拉盖天文台成为当时的重要学术中心. 他还制作了许多先进的天文观测仪器,进行了精密的观测,于1271年完成《伊儿汗历数书》的编制工作. 1274年纳西尔丁在巴格达患病. 一月后逝于巴格达附近的卡济迈因,葬于距巴格达几英里处的7世纪伊斯兰什叶派首领穆萨阿尔卡济姆 (Musa al-Kāzim) 陵墓附近.

已知的纳西尔丁论著和书信多达150种,主要用阿拉伯语写成,亦有25种是用波斯文写成的. 他的个别论著中出现土耳其语. 据说他还懂得希腊语. 纳西尔丁的论著涉及当时伊斯兰世界的所有学科,其中以数学、天文学、逻辑学、哲学、伦理学和神学影响较大. 这些论著不仅在伊斯兰世界被奉为经典,也对欧洲科学的觉醒乃至整个世界文化产生较大影响. 据说纳西尔丁制作的天文仪器曾被中国借鉴.

数学

纳西尔丁在数学上主要有三部著作,分别论述算术、几何和三角学.

《算板与沙盘计算方法集成》 (Jawāmi‘ al-hisāb bi’l-takht wa’l turāb) 主要讲算术. 他继承了阿拉伯数学家、天文学家奥马海亚姆 (Omar Khayyam) 的算术成果,将数的研究扩展到无理数等领域,并在书中采用了印度数码. 该书还涉及帕斯卡三角形,即二项式系数构成的三角形. 它在阿拉伯国家最早是由11世纪数学家凯拉吉 (al-Karajī) 构造出来的,纳西尔丁可能受此启发而载述. 书中还讨论了求一个数的四次或四次以上方根的方法,

成为现存的记载这种方法的最早论著．纳西尔丁与他在迈拉盖的同事一起发展的计算技术后来由卡西（al-Kashī）等数学家继续研究，取得若干重要成果．数论中"两个奇平方数的和不可能是一个平方数"这一定理归功于纳西尔丁．

《令人满意的论著》（al-Risāla al-Shāfiya）主要论述几何学，特别是欧几里得平行公设．此外，纳西尔丁曾两次修订和注释欧几里得的《几何原本》，同样对平行公设作了较深入的探讨．欧几里得平行公设是阿拉伯数学家研究几何学的主要内容，塔比伊本库拉（Thābit ibn Qurra）、奥马海亚姆等人都对此做出过贡献．纳西尔丁试图利用欧几里得的其他公理和公设证明第五公设（即平行公设），他沿用奥马海亚姆的四边形方法，假设一个四边形ABCD中，AB和CD相等且均垂直于BC边，∠A与∠D相等．他证明了如果∠A与∠D是锐角，则可推出一个三角形的内角和小于180°．这正是非欧几何中罗氏几何的基本命题．纳西尔丁在有关平行公设的论述中得到一系列与平行公设等价的命题，成为非欧几何前史的重要里程碑．他的工作由意大利数学家G.萨凯里（Saccheri）等人发扬光大，并最终导致19世纪非欧几何学的建立．

《横截线原理书》（Kashf al-qinā'fī asrār Shakl al-qitā'）被称为是纳西尔丁最重要的数学论著，主要研究三角学．书名的字面意思为"由截线组成的图形"，其中的图形指"完全四边形"，即四根直线，或是球面上四个大圆弧的总合，要求任一直线或弧都与其余直线或大圆弧相交于三点，因此该论著也常被译为《论完全四边形》．这是数学史上流传至今的最早的三角学专著．在此之前，三角学知识散见于天文学论著中，是附属于天文学的一种计算方法．纳西尔丁的工作开始使三角学脱离天文学，使之成为纯粹数学的一个独立分支．

《横截线原理书》共分5卷．卷1为了论述三角学的需要而发展了希腊数学中的比例论．纳西尔丁从比的乘积的定义出发，认为每一个比都是一个数，从而成对的比值遵循乘法的交换律．他

还给出合成比的一系列性质，扩展了数的运算；卷 2 论述完全四边形，给出与之相关的一些定理的证明；卷 3 论述平面三角函数，用平面圆定义了弧的正弦，并首次明确陈述了正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$；卷 4 论述球面完全四边形；卷 5 对球面三角形进行分类，引入了除弧的正弦外其他 5 种球面三角函数概念，第一次给出球面直角三角形中的 6 种边角关系式：设 c 是该三角形的斜边，则有 $\cos c=\cos a\cdot\cos b$，$\cot A=\tan b\cdot\cot c$，$\cos c=\cot A\cdot\cot B$，$\sin b=\sin c\cdot\sin B$，$\cos A=\cos a\cdot\sin B$，$\sin b=\tan a\cdot\cot A$，这实际已表明，由球面三角形的三个角，可以求得其三边；由三条边亦可求得三个角．这是平面三角与球面三角差异的重要标志．纳西尔丁没有借用古希腊的门纳劳斯（Menelaus）定理或有关的天文学知识，开始了对三角函数本身的研究．他还借助球面极三角形来求解一般的球面三角形．他的著作于 15 世纪传入欧洲，促进了三角学的创立和传播．

除了欧几里得《几何原本》外，纳西尔丁还修订和注释过古希腊数学家、天文学家奥托利科斯（Autolycus of Pitane）、阿利斯塔克（Aristarchus of Samos）、阿波罗尼奥斯（Apollonius）、阿基米德(Archimedes)、许普西克勒斯(Hypsicles of Alexandria)、西奥多修斯（Theodosius of Bithynia）、门纳劳斯（Menelaus of Alexandria）和托勒密（Ptolemy）等人的著作，其中一些成为当时学生学习数学的教本，在伊斯兰世界广泛流传．

天文学

纳西尔丁是一位声名显赫的天文学家，其主要贡献如下：

(1) 建造了当时最先进的天文台——迈拉盖天文台．由于得到旭烈兀的支持，纳西尔丁有了财政保障，建台资金主要来自教会接受的捐赠．天文台建成后吸引了各地学者前来工作，其中还包括一位姓名未能考定的中国人．纳西尔丁的两个儿子也在此工作．天文台中装备精良，有大型壁式象限仪（mural quadrant）、装有

5 个环和一个照准仪的浑仪、具有两个象限仪的平径环仪、星位角尺等. 天文台还附有一个藏书丰富的图书馆,据称存有"所有科学书籍". 该天文台成为伊斯兰世界的学术中心,对当时各种学科的复兴起了重要作用.

(2) 编写了一批天文学论著. 迈拉盖天文台组建期间, 纳西尔丁与合作者积 10 余年的观测结果,于 1271 年编成《伊儿汗历数书》(Zīj-i Ilkhānī, 西方称《伊儿汗天文表》). 该书用波斯文写成,后译为阿拉伯文,其中一部分 1650 年在伦敦被译为拉丁文.书中主要贡献是测定岁差常数为每年 51″. 纳西尔丁的另一天文著作是《天文学宝库》(Tadhkirah), 其中对托勒密的天文学体系作了批评,提出建立行星运动新理论的计划,是中世纪天文学中唯一的新数学模型方法,对后继天文学家有较大影响,很可能影响到哥白尼天文理论的创建. 在该书第 13 章中纳西尔丁证明了下述定理: "如果一个圆在一定圆内沿定圆的圆周滚动,前者的半径是后者的一半, 则该圆周上任一点的轨迹是一条直线, 且是定圆的直径". 纳西尔丁将它应用于行星理论中, 解释行星的视运动. 此外,纳西尔丁对托勒密的《天文学大成》(Almagest) 作了评注,将苏非(Abd al-Rahān al-Sūfī)的《恒星图象》(Ṣuwar al-Kawākib) 一书由阿拉伯文译为波斯文,还写过有关星盘等方面的专题论著.

(3) 收藏和制作了许多精密的天文观测仪器. 其中有些仪器的制作原理随纳西尔丁的天文学著作在蒙古人入侵时流传到中国. 据《元史》载, 元初在中国的阿拉伯人札马鲁丁 (Jamal al-Dīn) 曾"造西域仪象"7 件,其中有些仪器与迈拉盖天文台造的仪器非常相象. 据推测,札马鲁丁可能自迈拉盖天文台来中国,他为中阿科技交流作出过重要贡献. 此外, 迈拉盖天文台的影响还波及印度, 18 世纪贾伊辛格二世 (Jai Singh II) 在德里等地建造天文台时便采用了迈拉盖天文台的结构.

其他贡献

纳西尔丁在伊斯兰世界被誉为"智者"的杰出榜样, 除上述成

就外，其贡献还涉及逻辑学、哲学、伦理学、矿物学以及神学、星占学等多种领域.

纳西尔丁在逻辑学方面共写了5本书. 其中最重要的一部是《推理基础》(Asās al-iqtibās), 被认为是当时此类书中内容最丰富的论著之一. 该书用波斯文写成, 主要阐述研究逻辑与数学关系的一种新方法. 他指出条件合取三段论法优于古希腊传统的直言三段论, 并将逻辑术语用数学符号表示出来. 他还区别了"物质"(substance)一词在哲学与其他科学中含义的不同,阐明了范畴与逻辑之间的关系.

纳西尔丁的哲学贡献主要是为伊本西那的哲学论著《指导与诠明之书》(al-Ishārāt wa'l-tanbīhāt) 作了权威性的评注, 与其他穆斯林哲学家的著作不同之处在于它近乎数学般的精确性, 致使哲学在伊斯兰世界得以复兴. 他被认为是阿拉伯亚里士多德学派的主要代表人物之一, 其哲学思想在某些方面具有泛神论和唯物主义的因素, 因而受到伊斯兰教正统派神学家的敌视. 他的哲学著作多用波斯文写成,对阿拉伯、中亚各族以及封建时期西欧科学与哲学的发展有较大影响.

纳西尔丁著有两种波斯文的伦理学专著: 《穆赫塔希米伦理学》(Akhlāq-i muḥtashimī)和《纳西尔伦理学》(Akhlāq-i nāṣirī), 后者约成书于1232年,是他最著名的作品. 他扩展了柏拉图传统的伦理思想,与亚里士多德伦理理论和伊斯兰教义结合起来,系统论述了其伦理学的哲学体系, 并详述心理学和精神康复等方面的内容. 该书在印度和波斯等穆斯林中成为最普及的伦理学著作, 影响达几个世纪.

《珍贵材料之书》(Tanksūkh-nāma) 是纳西尔丁的主要矿物学论著,亦用波斯文写成. 它基于前人的同类著作,共分4章, 分别论述了矿物的自然属性,宝石的特性、价格及医用性能, 炼金术的金属构成理论等. 其中矿物学名词成为波斯科学中有关术语的语源依据.

纳西尔丁的科学论著还包括一部《医学原理》(Qawānin al-

tibb)，但影响不大。此外，纳西尔丁被认为是一位神学家，他的《感情受艺术的作用而引起的净化》（Tajrīd）一直是伊斯兰什叶派神学教育的经典。他还为伊斯梅利教义作了精彩评注，写下《概念说》（Taṣawwurāt）等多种论著。

由于纳西尔丁多方面的贡献，也因为其主要论著是用波斯文写成，因此，他被尊称为伊斯兰科学复兴的奠基者，其著作在后来几个世纪都被奉为经典。他在数学和天文学中的贡献是划时代的，不仅在伊斯兰世界有深远影响，也对东西方的科学发展起了一定作用。

文　献

原始文献

[1] Naṣir al-Dīn, The Nasirean ethics, G. M. Wickens 译, London, 1964.

研究文献

[2] A. C. Pasha, Traité de quadrilatère, Constantinople, 1891.

[3] B. C. de Vaux, Les sphères célestes selon Nasīr-Eddīn Attūsī, 见 P. Tannery, Recherehes sur l'histoire de l'astronomie ancieme, Paris, 1893, pp. 337—361.

[4] E. S. Kennedy, The exact sciences in Iran under the Seljuqs and Mongols, Cambridge history of Iran, V., Cambridge, 1968, pp. 659—679.

[5] S. H. Nasr, Science and civilization in Islam, Cambridge, Mass., 1968; New York, 1970.

[6] S. H. Nasr, Al-Tusī, Muḥammad ibn Muḥammad ibn al-Ḥasan, 见 Dictionary of scientific biography, Vol. 13, 1980, pp. 508—514.

[7] A. Sayili, The observatory in Islam, Ankara, 1960.

[8] B. H. Siddiqui, Naṣir al-Dīn Ṭūsī, 见 M. M. Sharif, A history of Muslim philosophy, I, Weisbaden, 1963, pp. 564—580.

[9] A. S. Saidan, The comprehensive work on computation with board and dust by Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī, *Al-abḥāth*, 20(1967), 2, pp. 91—163; 3, pp. 213—293.

[10] Б. A. 罗纯费力德著，杜石然译，纳速剌丁·徒思在数学方面的工作，见《科学史集刊》第1集，科学出版社，1958，第88—100页。

奥　雷　姆

梁　宗　巨

（辽宁师范大学）

奥雷姆，N（Oresme，Nicole）约1320年生于法国卡昂（Caen）附近；1382年7月11日卒于法国利雪（Lisieux）．数学、自然哲学．

奥雷姆的祖先是诺曼底人（Norman，10世纪定居在法国塞纳河口的诺曼人）．他早年可能就学于巴黎大学的著名学者J．比里当（Buridan），受其思想影响颇深．1348年以后在纳瓦拉学院（Collège de Navarre）学神学，1355—1356年取得神学硕士学位．奥雷姆曾在学院管理财务，后来成为学院的主要负责人，直到1361年12月辞职．

他和当时的皇太子[1364年继承其父约翰二世（John II）成为法国国王查理五世(Charles V，1364—1380年在位)]有交往．1356年，约翰二世被英军俘虏，皇太子摄政．1359年奥雷姆曾以国王秘书的身分签署文件．1360年被委派到鲁昂（Rouen）去为太子商谈一笔贷款．1361年奥雷姆被任命为巴约(Bayeux)的副主教，但没有赴任．1362年11月23日又被任命为鲁昂的牧师，1363年2月10日改任巴黎的圣沙佩勒（Sainte—Chapelle）的牧师．一年后(1364年3月18日)升任鲁昂总教堂教长．他居此要职直到1377年成为利雪的主教．不过他在1380年以前并未定居在利雪，而是奔波于鲁昂与巴黎之间．

中世纪的学者多半是神职人员，他们有充分的闲暇来研究学问，生活有保障，又有更多的机会接触各种典籍文献．奥雷姆就

是典型的代表。他还有一个优越的条件，即得到国王的支持。

查理五世于1364年即位，他十分重视学术研究，关心为政府服务的学者。奥雷姆受他委托，从1369年起，把亚里士多德(Aristotle)的多种著作由拉丁文译为法文，其中有《伦理学》(Le livre de ethiques d'Aristote, 1372)、《政治学》(Le livre de politique d'Aristote, 1374)、《经济学》(Livre de economique d'Aristote)等。后世对于这些译本评价很高，认为对法国语言文字的发展作出了重要贡献。

奥雷姆一生的著作在30种以上，不过大部还是手稿，其中一部分直到近、现代才刊行于世。从这些作品可以看到，他是一个颇有辨别力的经院哲学家，常针对当时流行的学说进行论争，和一些神学家、占星术家及说教者对立。

在数学方面，奥雷姆有两项突破性的工作，一是为解析几何的创立开辟了道路；二是引入非正整指数幂的概念。

解析几何的先驱

解析几何建立于17世纪，但其中包含的思想则由来已久。它的发展大致经过三个步骤：(1)发明坐标制，用两个数确定点的位置；(2)认识几何与代数(或形与数)的对应关系；(3)作出函数 $y=f(x)$ 的图形。

第一步起源很早，古代的天文学家如中国的石申、希腊的希帕霍斯(Hipparchus)用经纬度表示恒星在天球上的位置，就是一种坐标制。坐标思想甚至还可以上溯到古埃及人划分地面区域的办法(文献[9]，Vol. 2, p.316)。阿波罗尼奥斯(Apollonius)在《圆锥曲线论》中更进一步引入了一种斜角坐标系。

数与形互相渗透也是古已有之。毕达哥拉斯(Pythagoras)早就注意到两者的结合。欧几里得(Euclid)的几何代数学(用几何的方法论述代数问题)是众所周知的。中世纪的L. 斐波那契(Fibonacci)也曾在《实用几何》(Practica geometriae, 1220)中用代数方法去解几何问题。

奥雷姆的贡献在于向第三步过渡．他的思想已接触到在直角坐标系中用曲线表示函数的图象，不过只着重讨论了匀加速度物体的运动．

13—14 世纪，亚里士多德的学说盛行于欧洲，但其谬误也渐为人们所察觉．14 世纪 40 年代前后，英国牛津大学默顿学院(Merton College) 有一批逻辑及自然哲学家力图建立正确的理论．其中有 T. 布雷德沃丁 (Bradwardine，英国基督教会中心坎特伯雷的大主教)、R. 斯温内谢德 (Swineshead) 等．他们研究"形态的幅度" (latitude of forms)，相当于现在所说的"质的强度" (intensity of qualities)．所谓"质"，指的是具有某种强度(在物体的某一点上或在某一时刻)的性质，如热、密度、速度等．他们考察物体从某一点到另一点或从某一时刻到另一时刻的质的强度变化．这种变化可能是均匀的，也可能是非均匀的．

他们已得到一些结果，如具有匀加速度的运动物体在给定时间 t 内所经过的路程 S 等于用同样时间以平均速度所经过的路程．平均速度就是初速 v_0 与末速 v_t 的算术平均值，也就是时间中点的速度，即

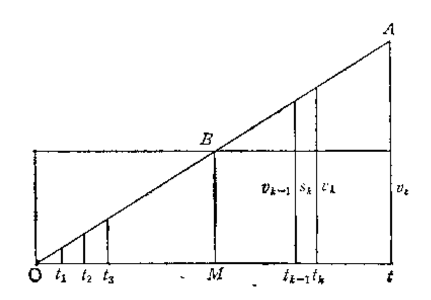
$$S = \frac{1}{2}(v_0 + v_t)t.$$

这一公式被称为"默顿法则"(文献[7]，p. 88，译本 p. 118)．

奥雷姆深知这些结果．他在 1350—1360 年间先后写了好几种著作，阐述他的观点．如《形态的幅度》(Tractatus de latitudinibus formarum)、《均匀与非均匀强度》(Tractatus de uniformitate et difformitate intensionum)、《质量与运动的构型》(Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum) 等．

他的中心思想是用图形来表示一个可变量的值，这个量依赖于另一个量．这可说是函数概念及函数图示法的萌芽．他详细分析了匀加速运动，用一条水平直线(相当于现在的横坐标轴)表示时间(即时间坐标)，直线上每一点代表一个时刻．每一个时刻对应着一个速度，该速度可用一条垂直于此点的线段来代表，其长

度正比于速度的大小. 用线段表示一种量是依照希腊人的习惯，速度随着时间均匀地增大，因此线段的长度也均匀地增长，它的端点就构成一条直线. 这直线和水平直线，再加上表示初速、末速的线段围成一个梯形. 如初速为 0，则形成一个三角形 OtA（如图）.



奥雷姆指出，三角形的面积等于物体在时间 t 内经过的路程. 在时间中点 M 处的速度是末速度之半，即平均速度，三角形面积就等于以同样的时间 t 为底，以平均速度为高的矩形面积. 这个结论和默顿法则是一致的，也可以说是默顿法则的一个几何说明. 猜想他已有粗浅的积分思想，否则就很难理解他实际已使用了瞬时速度这个概念.

试将 $[0,t]$ 用分点

$$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{k-1} < t_k < \cdots < t_n = t$$

等分为 n 个子区间. 取出一个甚小的时间段 $\Delta t = t_k - t_{k-1}$ 来看，它所对应的细长梯形的上、下底 v_{k-1}，v_k 差不多相等，每一个都可以作为平均速度，再乘以 Δt 就得到梯形面积 S_k 的近似值. 所有这些 S_k 的总和等于三角形面积，也就是物体走过的全程. 奥雷姆并没有明显地表达上面的推理，但可能是他的思路.

他当时是借用地理经纬度的术语来叙述图示法的. 经度（longitudines）相当于现在的横坐标，纬度（latitudines）相当于纵坐标（前面意译为幅度），垂直线段顶点所形成的直线称为"顶点

直线”(linea summitatis)，相当于函数的曲线．可见坐标思想直接来自经纬度．

奥雷姆的学说在欧洲产生了广泛的影响，它不但启发笛卡儿在此基础上创立了解析几何，还给伽利略的力学研究提供了线索．伽利略注意到根据奥雷姆关于匀加速度的图解可以推出“奇数定律”(law of odd numbers)，从而得到他的著名匀加速度运动公式．(文献[10]，p. 296)

同前面一样，用分点将时间段 $[0,t]$ 等分为 n 个子区间，每个子区间的长 $\Delta t=\frac{t}{n}$．任取一个子区间 $[t_{k-1},t_k]$，其上的梯形面积是 S_k．由于速度随时间而均匀增长，故速度 v 正比于 t，即 $v=At$(A 是常数)．又 $t_k=k\cdot\Delta t$，$v_k=At_k=Ak\Delta t$，同样，$v_{k-1}=A(k-1)\Delta t$，于是

$$S_k=\frac{v_{k-1}+v_k}{2}\cdot\Delta t=\frac{1}{2}A\Delta t^2(2k-1),$$

即 $$\frac{S_1}{1}=\frac{S_2}{3}=\frac{S_3}{5}=\cdots=\frac{S_k}{2k-1}=\cdots=\frac{S_n}{2n-1}.$$

这就是“奇数定律”．注意到从 1 起连续 n 个奇数的和等于 n^2，即得三角形面积(路程)：

$$\begin{aligned}S&=S_1+S_2+\cdots+S_n\\&=\frac{1}{2}A\Delta t^2[1+3+\cdots+(2n-1)]\\&=\frac{1}{2}A\Delta t^2\cdot n^2=\frac{1}{2}At^2.\end{aligned}$$

这正是伽利略的公式．

奥雷姆也曾讨论过非均匀变化的情形，例如图象不是直线而是一个半圆．若改变比例系数，图象便是半圆的拉长或压缩，不过他并不知道这是椭圆．他还把“形态幅度”的思想推广到三维甚至四维的情形．考虑一个平面区域，在其上每一点都竖立一根垂直线段以表示某种形态的幅度，于是线段端点和平面构成一个立体．他的着眼点是立体而不是端点形成的曲面，因此和二元函数图象

的概念是有差距的。他还进一步推广到三元函数的情形，不过当时欧洲的数学水平尚未具备发展这种新思想的条件(文献 [8]，p. 49)。

其他贡献

奥雷姆另一项突破性的贡献是引入非正整指数的概念及符号。分指数的概念在布雷德沃丁的书中已见端倪。他讨论力(F)、阻力(R)与速度(v)间的关系时曾给出指数式(1328)：

$$\frac{F_2}{R_2}=\left(\frac{F_1}{R_1}\right)^{\frac{v_2}{v_1}}.$$

奥雷姆以此为出发点加以发挥，在《比例的比例》(De proportionibus proportionum，约 1360)中给出指数的运算规律，相当于现在的

$$x^m\cdot x^n=x^{m+n},\quad (x^m)^n=x^{mn}.$$

其中 m，n 可以是分数。在另一本书《比例算法》(Algorismus proportionum) 中更创设分指数的符号。把

$$2^{\frac{1}{2}}\text{写成}\ \boxed{\frac{1\cdot p}{2\cdot 2}},\quad \left(2\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}\ \text{写成}\ \boxed{\frac{1\cdot p\cdot 1}{4\cdot 2\cdot 2}}$$

他也把

$9^{\frac{1}{3}}$ 写成 $\frac{1}{3}\cdot 9^p$，$2^{\frac{1}{2}}$ 写成 $\frac{1}{2}2^p$ (文献[11]，Vol. 1，p. 92;[9]，Vol. 1，p. 239)。这是他的发明，不过没有被后人采用。

奥雷姆甚至把指数推广到无理数的情形，如 $\left(\frac{2}{1}\right)^{\sqrt{1/2}}$.

在无穷级数方面，他已注意到敛散性的问题。并求出若干无穷级数的和。如

$$1+\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{4}\cdot 3+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\cdot n+\cdots=4$$

等。

除了数学之外，奥雷姆在别的领域也有不少论著。他的《占卜书》(Livre de divinacions) 是为反对巫术和占星术而作。天文

学方面，他在《球论》(Traité de la sphère)和《天空与世界》(Livre du ciel et du monde)中阐发了他自己的宇宙观。他不接受亚里士多德的静止地球位于宇宙中心的学说，认为地球是动的，但未提出绕日的观点。

奥雷姆曾从事财务管理及造币工作，写成《货币制度》(De moneta，约1360年写成，1484年出版)一书。查理五世改革他的财政制度，就是以奥雷姆的理论为依据的。因此他又被称为中世纪最大的经济学家。

总之，奥雷姆在多方面特别是数学方面有许多创新，在中世纪的欧洲产生了深远的影响。

文　　献

原始文献

[1] N. Oresme, Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum, 1350's (英译本：Treatise on the configurations of qualities and motions, 见 E. Grant, A source book in medieval science, Harvard University Press, 1974).

[2] N. Oresme, Tractatus de latitudinibus formarum, Tractatus de uniformitate et difformitate intensionum, Padua, 1482. 参见 D. J. Struik, A source book in mathematics, 1200—1800, Harvard University Press, 1969.

研究文献

[3] M. Clagett, ed., Nicole Oresme and the medieval geometry of qualities, University of Wisconsin Press, 1968.

[4] E. Grant, ed., De proportionibus proportionum, University of Wisconsin Press, 1966.

[5] M. Clagett, The science of mechanics in the middle ages, University of Wisconsin Press, 1959.

[6] M. Curtze, Die mathematischen Schriften des Nicole Oresme, Berlin, 1870.

[7] C. H. Edwards, The historical development of the calculus, Springer-Verlag, 1979 (中译本：C. H. 爱德华，微积分发展史，北京出版社，1987).

[8] C. B. Boyer, History of analytic geometry, Scripta Mathematica, 1956.

[9] D. E. Smith, History of mathematics, Dover Publications, 1958.

[10] C. B. Boyer and U. C. Merzbach, A history of mathematics, second edition, John Wiley & Sons, 1989.

[11] F. Cajori, A history of mathematical notations, Open Court Publishing Co., 1928.

卡　西

梁 宗 巨
（辽宁师范大学）

卡西（al-Kāshī, Ghiyāth al-Dīn Jamshīd Mas'ūd）亦称卡尚尼（al-Kāshānī），生于卡尚（Kāshān，今属伊朗）；1429年6月22日卒[1]于撒马尔罕（Samarkand, Самарканд，今属乌兹别克）。天文学、数学。

卡西的生年没有确实的记载，他的活动最早见于文献的是1406年6月2日，当时他在家乡观测一次月食。卡西是阿拉伯国家中世纪最后的一位著名天文学家和数学家，人们常以他的卒年为这个时代的终结。

14世纪末叶，中亚细亚的跛子帖木儿（Timur the Lame 或 Tamburlaine，1336—1405，成吉思汗的后裔）建立了帖木儿帝国，定都撒马尔罕。他的孙子乌鲁伯格（Ulugh Bēg，1394—1449）是一个科学家，精通天文，而且是科学、艺术的倡导者与保护人，1417—1420年，他在撒马尔罕创办了一所高级的教授科学（包括天文学）和神学的学校——马德拉撒（madrasa）。大约4年之后，又筹建一座三层楼的天文台，招聘一批科学家在那里工作，使撒马尔罕成为东方最重要的科学中心。1447年，乌鲁伯格继承王位成为苏丹，进一步加强学术活动，可惜两年后被刺死，他倡导的事业随之而衰落。

卡西的科学生涯是和乌鲁伯格息息相关的。他曾是一个医

[1] 卒年的另一说是1436年。

生，但他渴望从事天文与数学的研究。在长期贫困与徬徨之后，终于在撒马尔罕找到一个稳定而又荣耀的职位，即在乌鲁伯格的宫邸协助策划开展科学工作。卡西何时到撒马尔罕已不可考，只知道在 1424 年他曾和乌鲁伯格讨论过有关天文台的规划。参加讨论的还有卡迪·扎达·鲁米（Qādī Zāda al-Rumī）和另一个来自卡尚的穆因丁（Mu'in al-Dīn）。有的书将鲁米和卡西混淆了，以为是同一个人（文献[15]，Vol. 1, p. 289）。其实卡西是第一任台长，卡西去世后，鲁米继任第二任台长。

卡西积极参加天文台的修建和仪器的装备，成为乌鲁伯格的得力助手和合作者。在给父亲的一封信中，卡西极力赞扬乌鲁伯格的数学才能，说他有渊博的知识，组织活动能力也很强。卡西还强调当时讨论科学问题的自由空气，没有这种空气，科学的进步是不可能的。

乌鲁伯格对待学者很宽厚，他谅解卡西对宫廷礼仪的疏忽，以及缺乏良好的生活习惯。在《乌鲁伯格历》（Ulugh Bēg's Zīj）的序中，乌鲁伯格提到卡西的死，说"他是一位杰出的科学家，是世界上最出色的学者之一，通晓古代科学，并推动其发展，他能解决最困难的问题"。

在撒马尔罕期间，卡西的学识已臻成熟，连续完成了他一生中最有价值的著作。1424 年 7 月写成《圆周论》（Risāla al-muḥīṭīyya, The treatise on the circumference），得到当时世界上最精确的圆周率值。1427 年 3 月 2 日完成《算术之钥》（Miftāḥ al-ḥisāb, The key of arithmetic），这是一本初等数学的百科全书，题献给乌鲁伯格。上述二书已由苏联的罗森菲尔德（Б. А. Розенфельд）等从阿拉伯文译成俄文[1]。另一本《论弦与正弦》（Risāla al-watar wa'l-jaib, The treatise on the chord and sine）给出 $\sin 1°$ 的精确值，未记日期，但初稿显然写在《算术之钥》之前，因《算术之钥》的序言中提到它。卡西的另一项任务是参与制定《乌鲁伯格历》，这是一部讨论天文、历法的书，包括星表和数学用表。卡西肯定投入巨大的精力并做出了贡献。不过在他生前只完成开

头的理论部分，这部历法在卡西死后很多年才由他的后继者完成。

圆周率的计算

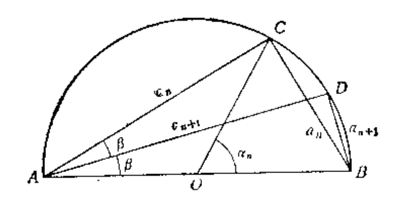
圆周率 π 的研究，在一定程度上反映这个地区或时代的数学水平。我国祖冲之在公元 462 年算出 π 的 8 位可靠数字：

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927.$$

直到 1424 年，卡西才打破这个世界记录。

他所用的方法仍然是求出圆内接与外切正多边形的周长。从正 6 边形开始，每次边数加倍，这一点和阿基米德、刘徽相同，但计算过程各有特点。

卡西首先根据欧几里得几何证明一个几何命题，然后导出所需要的计算公式。为简单起见，下面用现代三角法来说明他所用的公式。



如图，设 $AB=d=2r$ 是圆的直径，r 表半径。a_n，c_n 是内接于圆的直角△ABC 的两个直角边，取 $\widehat{BC}$ 的中点 D，记 $AD=c_{n+1}$，$BD=a_{n+1}$。又 $\angle BAD=\angle DAC=\beta$。则

$$c_n=d\cos 2\beta,$$

$$c_{n+1}=d\cos\beta.$$

$$c_{n+1}^2=d^2\cos^2\beta=d^2\cdot\frac{1+\cos 2\beta}{2}$$

$$=r(2r+c_n),$$

即

$$c_{n+1}=\sqrt{r(2r+c_n)}.$$

如已知 c_n，通过此式即可得 c_{n+1}。a_n 可通过勾股定理，由 c_n 算出：

$$a_n=\sqrt{(2r)^2-c_n^2}.$$

设 a_n 是内接正多边形的一边，那么 a_{n+1} 就是边数加倍的内接正多边形的一边。

正 6 边形的边长为 r，记作 $a_1=r$，而 $c_1=r\sqrt{3}$。令边数加倍，从(1)式得到 $c_2=r\sqrt{2+\sqrt{3}}$，再加倍(24 边)，

$$c_3=r\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}},$$

这样算出一系列的 $c_n(n=3\cdot 2^n)$，一直算到 $n=28$，即

$$3\cdot 2^{28}=805\ 306\ 368$$

边，得到

$$c_{28}=r\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\ (28\text{ 重根})$$

及

$$a_{28}=r\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\ (28\text{ 重根})$$

的值。a_{28} 乘以边数 $3\cdot 2^{28}$，便是圆内接正 $3\cdot 2^{28}$ 边形的周长。类似地，可以求出外切正 $3\cdot 2^{28}$ 边形的周长。最后取二者的算术平均来作圆周长的近似值，用 60 进分数表示出来(取 $r=1$)：

$$6^\circ 16' 59'' 28^{\text{III}} 1^{\text{IV}} 34^{\text{V}} 51^{\text{VI}} 46^{\text{VII}} 14^{\text{VIII}} 50^{\text{IX}},$$

此处借用 60 进角度的表示法，6° 表示 6 是整数，后面是 60 进分数。

卡西在《圆周论》的第 8 节中又将此值改写成 10 进分数(即小数)

$$6.283\ 185\ 307\ 179\ 586\ 5.$$

除以直径 2，即得圆周率

$$\pi=3.141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 25.$$

它有 17 位准确数字，打破了祖冲之保持了 900 多年的世界记录.

1596 年，L. V. 柯伦 (Ceulen) 用内接及外切正 $60\cdot 2^{33}$(= 515 396 075 520) 边形算出小数后 20 位，才打破了卡西保持一百多年的记录.

值得注意的是，这里出现了 10 进小数的记数法. 在伊斯兰国家，这不是最早的. 5个世纪以前，乌格利迪西 (al-Uqlīdisī) 已认识到小数的优越性，并在书中使用. 不过未被后人所接受(文献[14], p. 481). 最先系统地介绍小数的，一般认为还是卡西. 他在另一本重要著作《算术之钥》中进一步阐述小数的理论，指出小数与 60 进分数互化的方法.

中国自古以来就用 10 进记数法，所以小数的应用也很早. 刘徽注《九章算术》(公元 263 年)，在“少广”章开方术下面的注中就提到小数(虽然未有现代的符号和名称)，比西方早千余年. 有理由猜想阿拉伯国家的 10 进小数是中国传过去的 (文献 [9], p. 268).

sin1° 的计算

卡西在数值计算方面的另一项成果是给出 sin 1° 的精确值，记载在他的《弦与正弦论》一书中. 在他之前，艾布瓦发 (Abu'l-Wafā) 及伊本尤努斯 (Ibn Yūnus) 曾研究过这一问题，但结果不够精确.

11 世纪时，伊斯兰数学家已知三等分角问题导致一个三次方程

$$ax = b + x^3.$$

比鲁尼 (al-Bīrūnī) 曾利用这一类方程近似地作出正九边形，但方法已失传. 卡西则创设一种求方程近似根的迭代法. 设方程

$$x = \frac{b + x^3}{a}$$

有一个很小的根，忽略其 3 次幂，令第 1 近似值为

$$x_1 = \frac{b}{a},$$

取第 2 近似值 $x_2 = \frac{b + x_1^3}{a}$,第 3 近似值 $x_3 = \frac{b + x_2^3}{a}$,一般，$x_n = \frac{b + x_{n-1}^3}{a}$.

当 $\frac{3x^2}{a} < r < 1$ 时,该迭代程序是收敛的。

卡西的方法，用现代三角的术语来说，是先求出 sin 72°, sin 60° 足够精确的值,再利用 sin 12° = sin(72° − 60°)及半角公式算出 sin 3°，根据三倍角公式有(文献[13],p. 151)

$$\sin 3° = 3\sin 1° - 4\sin^3 1°,$$

记 $x = \sin 1°$，则

$$x = \frac{\sin 3° + 4x^3}{3}.$$

从 $x_1 = \frac{\sin 3°}{3}$ 开始,进行迭代

$$x_n = \frac{\sin 3° + 4x_{n-1}^3}{3} \quad (n = 2, 3, \cdots).$$

卡西定半径为 60，使用 60 进记数法。在实际计算中并不是逐个求出 $x_2, x_3, \cdots$ 而是找到每一个的修正值。最后的结果是

$$1°2'49''43^{\mathrm{III}}11^{\mathrm{IV}}14^{\mathrm{V}}44^{\mathrm{VI}}16^{\mathrm{VII}}26^{\mathrm{VIII}}17^{\mathrm{IX}},$$

相当于半径为 1 时的 10 进小数

0.017 452 406 437 283 510

前 16 位数字都是准确的,最后一位数才出现误差。

后来卡迪·扎达·鲁米著《论 sin 1° 的求法》(Risāla fi'l-jayb, Treatise on the determination of sin 1°)，阐述卡西的方法。鲁米的孙子米林·切莱比 (Mirīm Chelebi) 进一步改进其法,使计算步骤减少,可更快地求出具有要求精确度的近似值。这是中世纪代数方面最突出的成就之一。数学史家 H. 汉克尔 (Hankel, 1839—1873) 评论道:“其精巧与优美不亚于西方韦达以后的近似计算。”

《算术之钥》

《算术之钥》是卡西著作中篇幅最大的，它几乎网罗了当时的全部数学知识，堪称一部初等数学大全。它除了满足一般学生的需要外，对于从事实际工作的读者，如天文学家、测量员、建筑师、商人等也有帮助。其内容包括算术、代数与几何。书名的本身就表明作者把算术看作解决一切问题的钥匙，只要这问题能化作计算。卡西给算术下的定义是："一种科学，它可以借助已知量去寻求未知量的数值"。此书表达清晰，结构精良，方法实用，故深受读者欢迎，被用作手册传诵数百年之久。

《算术之钥》共分 5 卷，内容分别是：卷 1，整数的算术；卷 2，分数的算术；卷 3，天文学家的计算法；卷 4，平面与立体图形的度量；卷 5，用代数方法及双试位法解题。

在第 1 卷中卡西详细介绍了整数开方的一般方法。根的整数部分用类似秦九韶法〔西方称鲁菲尼（Ruffini）-霍纳（Horner）法〕来求得。如果是不尽根，

$$a < \sqrt[n]{a^n + r} < a + 1,$$

分数部分按公式

$$\frac{r}{(a+1)^n - a^n}$$

求出其近似值。

在书中卡西没有使用符号和公式，一切计算都是用文字叙述的。在阐明开方法的同时，还作出二项式系数的表，即帕斯卡三角形(或贾宪三角形)，写到 $(a+b)^n$ 展开式 $n = 9$ 时的系数。在卡西之前，阿拉伯国家已有不止一个人造过这个三角形，如凯拉吉（al-Karajī）、奥马海亚姆（Omar Khayyam）、纳西尔丁（Nasīr ad-Dīn al-Tūsī）等。不过都没有留传下来。

这一卷第 5 节还举出一个开 5 次方的实例：求

$$N = 44\,240\,899\,506\,197$$

的 5 次方根。根的整数部分是 $a = 536$，以此作第 1 近似值。第

2 近似值按下式来计算:

$$\sqrt[5]{N}=\sqrt[5]{a^5+r}\approx a+\frac{N-a^5}{(a+1)^5-a^5}.$$

分母是用二项展开式来算的。最后结果是

$$536\frac{21}{414237740281}.$$

第 2,3 卷阐述了 10 进分数(小数), 建立了一套和 60 进制并列的运算法则,两者可以互换。不懂天文学 60 进制的人也容易掌握小数方法,因此很快传播开来,对伊斯兰国家及欧洲都产生了深远的影响。卡西详细叙述了有限小数, 但未涉及循环小数。他创用特殊的小数记号,有时用一竖来分隔整数与小数部分,有时又用不同的颜色来区别。

第 4 卷是几何学,讨论了各种平面及立体图形的定义、性质及量度方法。

第 5 卷很重要,它给出一次到四次方程的解法。 11—12 世纪时, 奥马海亚姆曾用圆锥曲线去解 3 次方程。 4 次方程在卡西之前只是偶然出现过, 而卡西则全面地加以分类研究。有时他还用"双试位法"来解。

13—14 世纪,中亚细亚地区和中国交往频繁。 成吉思汗之孙旭烈兀 (Hulagu, 1219—1265) 1256 年进攻伊朗高原, 1258 年占领巴格达, 建立伊儿汗国。 他从中国带了一些学者到伊朗去,在他的宫廷中和当地的学者一起从事研究工作。在这之前, 文化已有零星的交流。因此阿拉伯的天文学家颇知中国的学术。10进记数法,整数的开方、高次方程的数值解法以及贾宪三角形等等都是中国数学的精华。卡西《算术之钥》的许多内容和中国算法如出一辙,受到中国的影响是可以肯定的(文献[12], p. 221; [10],p. 140;[11],p. 290)。 当然不排除卡西本人的创造发明。

天文历法著作

早在 1407 年, 卡西就写成《天的阶梯》 (The stairway of

heaven)，论述天体的距离与大小．又于 1416 年写成《观象仪器》(Treatise on ··· observational instruments)，介绍了包括浑仪(armillary sphere) 在内的 8 种天文仪器的构造，其中有些是卡西的独创． 他还修订了纳西尔丁领导下制定的《伊儿汗历》(Ilkhānī Zīj)，写成《修正的伊儿汗历》(Khāqānī Zīj)．在绪论中，他详细描述了平均月球运动及近点月 (anomalistic) 运动，这是以他三次在卡尚的月食观测以及在托勒密《天文学大成》中的三次月食记载为依据的．这本历法罗列了各种历法：伊斯兰教的阴历，波斯的阳历，希腊-叙利亚历，奥马海亚姆改良的阳历，中国-维吾尔历，最后是伊儿汗历．书中载有 60 进每隔 1′的 4 位正弦和正切表．还有黄道坐标与赤道坐标互化的表，以及有关日、月、行星、恒星的好几种表．地理方面，给出 516 个点的经纬度．

卡西还发明一种"天象盘"(plate of heavens)，形状像"星盘"(astrolabe)，可以确定行星的黄经、黄纬、留 (station)、逆行 (retrogradation) 以及到地球的距离等，记在《天象盘构造方法》(Nuzha al-ḥadāiq ···。On the method of construction of the instrument called plate of heavens, 1416) 中．

文　献

原始文献

[1] Б. А. Розенфельд (译)，В. С. Сегал и А. П. Юшкевич (校订)，Джемшид Гиясэддин ал-Каши (al-Kāshī)，Ключ арифметики，Трактат об окружности (《算术之钥》、《圆周论》阿拉伯原文与俄文对照本)，Москва，1956．

[2] al-Kāshī，Sullam al-samā' fi··· (《天的阶梯》，1407)，阿拉伯文手抄本，藏伦敦 India Office 755 等地．

[3] al-Kāshī，Khaqānī Zīj (《修正的伊儿汗历》，1413—1414)，波斯文手抄本，藏伦敦 India Office 2232 等地．

[4] al-Kāshī，Risāla dar sharḥ···(Treatise on the explanation of observational instruments，1416)，波斯文手抄本，藏莱顿、德黑兰等地．

研究文献

[5] V. V. Bartold，Улугбек и его время，Петроград，1918．

[6] Б. А. Розенфельд и А. П. Юшкевич，О трактате Qāḍi-Zāde ar-Rūmi об определении синуса одного градуса，*Историко-математические исследования*，**13**(1960)，pp. 533—556．

[7] A. Saidan. The earliest extant Arabic arithmetic, *Isis*, **57**(1966), pp. 475—490.
[8] R. Rashed, Entre arithmetique et algèbre. recherches sur l'histoire des mathématiques Arabes. Paris, 1984.
[9] C. B. Boyer, A history of mathematics, Princeton University Press, 1985.
[10] 李俨,中国算学史,商务印书馆,1955.
[11] 李俨,中国数学大纲(上),科学出版社,1958.
[12] 钱宝琮,中国数学史,科学出版社,1964.
[13] J. L. Berggren, Episodes in the mathematics of medieval Islam, Springer-Verlag, 1986.
[14] A. S. Saidan, The arithmetic of al-Uqlīdisī, D. Reidel Publishing Company, 1978.
[15] D. E. Smith, History of mathematics, Ginn and Company, 1923.

雷格蒙塔努斯

邵 明 湖

(辽宁师范大学)

雷格蒙塔努斯，J.（Regiomontanus，Johannes） 1436年6月6日生于德国哥尼斯堡(今俄罗斯加里宁格勒)；1476年7月6日卒于意大利罗马．天文学、数学．

雷格蒙塔努斯又名 J．缪勒（John Müller）．关于他的早期生活人们知道的不多，他12岁以前在家中受教育，然后去莱比锡学习．1450年4月14日在维也纳大学注册，开始跟随 G．波伊巴赫（Peuerbach）学习天文学．雷格蒙塔努斯于1452年1月16日获得学士学位，这时他才15岁．但由于该大学的规章制度，他直到21岁才得到硕士学位．1457年11月11日，他受聘为维也纳大学教员，从而成为波伊巴赫的学生和同事．在雷格蒙塔努斯的一生中，波伊巴赫对他的影响最大．波伊巴赫曾在意大利讲授数学，之后定居维也纳并使该大学成为当时欧洲数学的中心之一．他写过一本算术书和许多天文学著作，其中大部分直到他去世后才出版．是波伊巴赫最先认识到年轻的雷格蒙塔努斯的天才，他非常欣赏雷格蒙塔努斯对天文学的热爱，并极其认真地教育他．雷格蒙塔努斯从行星理论学起，逐渐掌握了托勒密（Ptolemy）的天文学说．他还试图掌握一切对天文学有用的知识，努力钻研几何学、算术与三角学，为他以后的发展打下了基础．与波伊巴赫的友谊使雷格蒙塔努斯终生受益．

1460年5月5日，神圣罗马教皇的使节 C．贝萨里翁（Bessarion）到达维也纳，经过波伊巴赫的介绍，他成为第二个对雷格蒙

塔努斯的一生产生重要影响的人物. 贝萨里翁不仅是教皇的一位成功的外交家,而且也是一位有造诣的学者,尤其在天文学方面. 他的母语是希腊语,又精通拉丁文,他热衷于向使用拉丁文的西方知识界介绍古希腊经典作家的著作,力劝波伊巴赫将托勒密的《天文学大成》(Almagest) 缩写成拉丁文出版,使之"更简明易懂",因为托勒密原著的语言晦涩,思想深奥. 当时维也纳大学并不教授希腊语,波伊巴赫也未掌握这门语言, 他利用 12 世纪克雷莫纳的杰拉德 (Gerard of Cremona) 的拉丁文本勉力译到第 6 卷便于 1461 年 4 月 8 日去世了,临终前他请求雷格蒙塔努斯继续完成这项工作. 为了实现波伊巴赫的遗愿,雷格蒙塔努斯开始努力学习希腊语,由于有贝萨里翁的指导,他在较短的时间里便熟悉了这门语言. 1461 年 11 月 20 日他跟随贝萨里翁到达罗马. 在这期间他阅读了贝萨里翁提供给他的一些希腊文科学著作. 根据记载, 1463 年 4 月 28 日之前雷格蒙塔努斯便完成了《天文学大成》的缩写,名为《概论》(Epitome). 他把波伊巴赫和自己合作完成的这本著作题献给了贝萨里翁, 但直到 1496 年 8 月 31 日该著作才得以出版,这已是雷格蒙塔努斯去世后 20 年了.

在罗马期间,雷格蒙塔努斯广交学者,尤其是那些熟悉希腊文的人,同时又忙于天文观测, 收集珍本图书(包括希腊文和拉丁文的), 有很大收获. 1463 年 7 月 5 日贝萨里翁作为教皇特使赴威尼斯共和国,雷格蒙塔努斯同行. 1464 年春天, 雷格蒙塔努斯在帕多瓦(当时在威尼斯共和国统治之下)大学演讲, 内容是关于 9 世纪穆斯林科学家法汉尼 (al-Farghànì) 的工作. 他在这次演讲中声称自己读过所有拉丁文和希腊文的经典学术著作. 1464 年 4 月 2 日的月食之后,他离开帕多瓦赴威尼斯等候贝萨里翁,正是在这里的 5—6 月间他完成了《论各种三角形》(De triangulis omnimodis)一书. 他将该书题献给贝萨里翁,这是雷格蒙塔努斯最重要的著作,但直到 1533 年才首次出版. 此外, 他还在威尼斯撰写了一篇对话,其内容是行星理论.

1467 年, 雷格蒙塔努斯接受匈牙利国王的邀请来到布达佩

斯，在当时的皇家天文学家M. 贝利卡(Martin Bylica of Olkusz)的协助下编制了他的《方位表》(Tables of directions). 1468年，他在布达佩斯计算了一张正弦表(取 $\sin 90° = 10^7$). 1471年，他离开匈牙利来到纽伦堡，在那里建立了一个印刷所以便出版科学著作，从而成为最早出版天文学与数学著作的人之一. 可能是1476年1月第伯河决口之后横扫罗马城的一场瘟疫夺去了雷格蒙塔努斯的生命. 对他死因的另一种说法是，因他宣称要纠正乔治(Geroge of Trebizond)天文学著作中的错误，对方怀恨在心，导致乔治之子将他毒死. 1476年7月6日，雷格蒙塔努斯卒于罗马.

雷格蒙塔努斯对数学的主要贡献是在三角学方面. 他的代表作《论各种三角形》，是第一本使三角学脱离天文学而成为数学的一个独立分支的系统著作. 在雷格蒙塔努斯之前，三角学的发展已经历了很长的历程，首先从天文学的研究中产生出球面三角的若干知识，逐渐地发展到平面三角学. 公元前1600年的巴比伦人便已具有弦的某些知识，"普林顿322号"(Plimpton 322)泥板的内容便显示了他们对三角形的深刻认识. 古埃及人也可能早已发现三角形的不同元素之间具有某种关联. 希腊人对天文学和几何学的研究促进了三角学的发展，他们首先认识到有必要建立三角形的边与角之间的精确关系. 希帕霍斯(Hipparchus)曾为了天文观测的需要作出一个弦表，门纳劳斯(Menelaus)则给出了三角形的一个基本定理. 之后，托勒密在其巨著《天文学大成》中发展了弦表，这些弦表在欧洲一直被广泛采用，直到雷格蒙塔努斯的著作发表之前没有多大改变. 三角学的下一步发展是在东方，印度人和阿拉伯人都为之做出了贡献. 印度人考虑半弦和圆的半径，这样他们就发现了现代三角学赖以存在的基础. 阿拉伯人艾布瓦法(Abul Wefa)首次引入正割和余割；巴塔尼(al-Battānī)为测定太阳的仰角而提出的概念"直阴影"和"反阴影"后来发展成了"余切"和"正切"；纳西尔丁(Nasir ad-Din)则指出了平面三角

学与球面三角学的差异，并始使三角学脱离天文学．雷格蒙塔努斯在写作《论各种三角形》时，知晓托勒密以及一些印度、阿拉伯数学家的工作．由于他不懂阿拉伯语，他只能阅读已译成拉丁文的一部分著作．他从前人的工作中知道了弦表、正弦律以及余弦律等，从而建立起三角学的统一基础，使之成为一个系统的整体．

《论各种三角形》产生于天文学研究的需要，早在波伊巴赫和雷格蒙塔努斯写作《概论》的时候，处理平面和球面三角形中边与角的比就是极为迫切的了．在该书献辞的末尾雷格蒙塔努斯表明他将写一本三角学的著作，这便是后来的《论各种三角形》．该书基于欧氏几何，共含5篇．第1篇共57个定理，头一部分（定理1—19）讨论了量和比，如定理19："如果四个成比例的量中有三个是已知的，则余下的第四个量也可知道．"这是《几何原本》中已经证明了的．其余部分则给出了直角、等腰及不等边三角形的几何解，其中定理20，27，28中提到或明确使用了正弦函数，如定理27："当一直角三角形的两条边已知时，（三角形中）所有的角都可求出来．"证明中便明确使用了正弦函数． 斜三角形的四种情形的解在定理49，50，52，53中分别得到处理．定理49如下："若一三角形的两条边及其夹角已知，则三角形的其他的边与角皆可求得．"证明中采用从未知角向对边作垂线的方法，将三角形化作两个直角三角形进行求解．在以上四个定理中没有提到正弦函数．三角学知识的系统处理开始于第2篇的定理1，该定理即是一般三角形中的正弦定理，雷格蒙塔努斯利用该定理对定理4和定理5中的斜三角形进行了处理：在一三角形中当两角及一边或两边及一角已知时，则余下的元素都可求得．接下来的许多定理可看作是今天意义上的练习题．在定理12和13中，雷格蒙塔努斯提出了求三角形边长的代数解法，其中用到二次方程．数学史家认为雷格蒙塔努斯熟悉切斯特的罗伯特（Robert of Chester）译的阿拉伯数学家花拉子米（al-Khowārizmī）的代数著作．定理26则隐含着三角形面积的三角公式．总之，第2篇的33个定理的内容基本上属于今天解三角形的范畴．第3篇共56个定理，是第4

篇的基础，其内容已由平面转移到球面。其中介绍了球被平面所截而产生的许多结果，如定理 15：“大圆是由球面上的两点决定的。”定理 47：“在球面三角形中，延长其一边时，则外角有时等于其对应的内角，有时大于它，有时甚至小于它。”第 4 篇的定理 16，17 分别给出了球面直角三角形和斜三角形中的正弦定理。在雷格蒙塔努斯的心目中，三角学是为天文学服务的，所以球面三角学的研究更为重要。该篇定理 25，26，27 处理了球面直角三角形，如定理25：“一球面三角形中，已知直角和两条边，则可求得其他的边和角。”定理 28—34 则给出了解斜球面三角形的 6 种情形。第 5 篇继续解球面三角形，只有 15 个定理，其中定理 2 即含有球面三角形的余弦定理，虽然用词与今天不同。用现代符号，它可化为如下形式：

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}.$$

雷格蒙塔努斯早在维也纳学习阿拉伯数学家巴塔尼的《天文学》时就发现了余弦律，他认识到其重要性，最先使之形成实用的定理。

雷格蒙塔努斯为三角学在平面和球面几何中的应用建立了牢固的基础。他去世后，他的著作手稿在学者中广为传阅，对 16 世纪的数学家产生了相当大的影响。从 J. 维尔纳（Werner）到 G. J. 雷蒂库斯（Rheticus）以至 N. 哥白尼（Copernicus），他们都受到雷格蒙塔努斯直接或间接的影响。

雷格蒙塔努斯还曾试图将丢番图（Diophantus）的手稿译成拉丁文。在 1464 年 2 月写给意大利数学家 G. 比安基尼（Bianchini）的一封信中，雷格蒙塔努斯声称自己发现了丢番图的一部不完整的手稿，并说如果自己得到全部手稿，将把它译成拉丁文，“因为我在我最尊敬的大师那里学到的希腊文足以完成这项任务”。他终未得到全部手稿，也没有译出这一部分手稿。然而现代对丢番图的发现就始于雷格蒙塔努斯那部不完整的手稿的发现。

雷格蒙塔努斯的三角学研究是为天文学服务的。15 世纪末，

托勒密的成就仍然是天文学思想发展的顶峰．波伊巴赫和雷格蒙塔努斯合作完成的《概论》使人们更易于掌握托勒密的巨著《天文学大成》，然而其作用不仅在于促使人们对过去的知识有更好的理解，更重要的是它对当时的科学发展做出了贡献．《概论》并不局限于对《天文学大成》的翻译，它还添加了后来的观测数据，修正了一些计算并加人一些评论性的文字，其中之一表明托勒密的月球理论所需要的月球的视直径与实际相差甚远，这一段(《概论》第 5 篇命题 22)引起了哥白尼(当时是波伦尼亚大学的学生)的注意．惊异于托勒密天文体系(已经流行了 1300 多年)的这一错误，哥白尼开始尝试为现代天文学奠定基础，从而摒弃了旧的托勒密体系．

雷格蒙塔努斯编制了许多天文表．他的《方位表》中包括天体黄经的计算，该表于 1490 年初版，以后多次再版．在问题 10 中，他指出应该通过使 $\sin 90°$ 等于 10^5 而不是 6×10^5(在《论各种三角形》第 5 卷定理 25 中使用了这一底数)来摒弃正弦表的 60 进制特征．在《论各种三角形》中他没有使用正切函数，但在《方位表》中使用了间隔 1° 直到 90° 的正切表．他取 $\operatorname{tg} 45° = 10^5$，是我们现今这类表的典范．1468 年，雷格蒙塔努斯在布达佩斯编制了一个正弦表，取 $\sin 90° = 10^7$．在他认识到 10 进制的长处之前，他已经准备了一个 60 进制的正弦表，取 $\sin 90° = 6 \times 10^6$．这两个表都于 1541 年初版于纽伦堡，同时出版的还有他的论文《正弦表的制作》(Construction of sine)．此外，他还在匈牙利完成一张关于天空每日视旋转的表，并且阐述了它的几何基础．

雷格蒙塔努斯自己出版了一些科学著作，包括他的《星历表》(Ephemerides)和波伊巴赫的《行星新论》(New theory of the planets)．《星历表》给出了 1475—1506 年间每天的天体位置，有趣的是，C. 哥伦布(Colombo)在第四次航海探险时随身携带了一份《星历表》，并利用它预示的 1504 年 2 月 29 日的月食吓唬牙买加的土著印第安人，终于使他们屈服．

文　献

原始文献

[1] Felix Schmeidler (ed.), Joannis Regiomontari opera collectanea, Osnabrück, 1972.

[2] Barnabas Hughes (tr.), Regiomontanus on triangles, Madison, Wis., 1967.

研究文献

[3] Ernst Zinner, Leben und Wirken des Johannes Müller von Konigsberg genannt Regiomontanus, 2nd ed., Osnabrück, 1968.

[4] Edward Rosen, Regiomontanus's Breviarium, *Medievalia et Humanistica*, **15** (1963), pp. 95—96.

许　　凯

景　　丽

（辽宁师范大学）

许凯，N.（Chuquet, Nicolas）约1440年生于法国巴黎；1487或1488年卒于里昂。算术、代数。

许凯自述是巴黎人，曾获医学学士学位。1484年，他在罗讷省的里昂完成《算术三篇》（Triparty en la Science des Nombres）H 吕利埃（L' Huillier）以此为线索，综合考察其他材料后认为：许凯可能于1440年左右生于巴黎，1480年起在里昂居住，从事法律或商业文件的抄写，1487或1488年卒于里昂（文献[1]，p 14；[6]，p 97）。

许凯是一个实用算术家，他的手稿分四部分：《算术三篇》、《问题集》、《几何》与《商业算术》，其中《问题集》是《算术三篇》的附录。手稿的全部内容可能完成于1484年前后。手稿最初由E. de 拉罗什（La Roche）珍藏，因为其中许多空白处的字迹是拉罗什的。拉罗什可能是许凯的学生，他著了一本算术书（1520年第一版，1538年再版），把其中的一些工作归于许凯。之后，许凯的手稿又几经转手，先后由意大利人莱昂纳多（Leonardo de Villa）、巴蒂斯特科尔贝尔（Baptiste Colbert）图书馆、路易十五的皇家图书馆保存，现藏法国国家图书馆。

许凯的手稿在完成后的多个世纪中一直鲜为人知，直到19世纪，它才受到数学史家的重视。1880年，A 马尔（Marre）出版了《算术三篇》，次年出版了《问题集》（只含题目、答案）。1979年，吕利埃编辑出版了《几何》，在马尔、吕利埃工作的基础上，G. 弗

莱格（Flegg）选译评注了许凯的手稿，于1985年发表．这样，许凯及其工作才为人了解．

5—11世纪的欧洲，数学基本停留在罗马人的水平上，他们使用罗马人繁琐的记数法，即使简单的乘除计算也很困难．12世纪，欧洲出现了崭新的景象，它逐渐从“封闭的封建领地经济”的束缚中解放出来，兴建了许多城市，手工业、商业也发展起来，并与阿拉伯国家进行贸易往来．这样，东方及古希腊的文化便开始传入欧洲．阿拉伯文、希腊文著作大量地被译成拉丁文，一些学者还著书传播阿拉伯和希腊的先进科学知识，以适应日益发展的工商业的需要．在这样的背景下，印度-阿拉伯数码及计算规则等传入欧洲，并逐渐被接受．随后，一些算术书和实用几何书出现了．1450年欧洲发明活版印刷术以后，实用数学书的数量明显增加．这些书融汇了希腊、阿拉伯的数学知识，并有所创造，为欧洲以后的数学发展奠定了基础．许凯的著作在当时实用书中是水平较高的，所以应受到重视．

《算术三篇》是许凯著作的理论基础，内容比较丰富．15世纪的算术书一般只介绍印度-阿拉伯数码的写法，整数、分数的四则运算，数的分类及性质，解决实际问题的比例法，单、双试位法等；而《算术三篇》不仅具有这些算术知识，还包含较系统的代数知识：根式、多项式的代数运算，列方程、解方程等．在知识范围上，许凯的著作可以和L．帕乔利（Pacioli）的《算术、几何、比及比例集成》（Sūma de arithmetica geometria proportioni et proportionalita，1494）相比．

《问题集》共166个问题．它所涉及的商业及日常生活的范围是很广泛的，如染布问题，工程问题，分钱问题，布、谷物等商品的价格问题等；还涉及关税、盈利、复利问题，砝码问题，“物不知数”问题，以及一些游戏题．《问题集》按所使用的方法分类，如级数类、比例类等．《问题集》中的题目多不是新的，它的意义在于使用代数方法解题．

《算术三篇》及《问题集》包含了许凯的主要数学贡献.

1. 方程组

过去求解相当于方程组的问题时,没有一般方法,所以解题过程繁琐且解题思想不易被掌握. 许凯试图寻找普遍适用的方法,他首先解决了一类特殊的方程组问题,即方程组中恒有一式,其各项系数均为 1, 如

$$\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 8x + 5y + 3z = 60. \end{cases}$$

在解这类问题时,许凯使用了一种相当于加、减消元法的方法.

许凯还用不同的字母表示不同的未知量, 如《问题集》中一题: 有 A,B,C 三人.若 A 从 B, C 那里共拿走 7 个钱币, 他的钱将比 B,C 一共所余的钱的 5 倍多 1;若 B 从 A, C 那里共拿走 9 个钱币,他的钱将比 A,C 一共所余的 6 倍多 2; 若 C 从 A,B 那里共得到 11 个钱币,他的钱将比 A,B 一共所余的 7 倍多 3, 问 A,B,C 各有多少钱. 许凯用 1^1(相当于 x)表 A 的钱数, 则三人共有钱: $\frac{6}{5}x + 8\frac{1}{5}$;为了解题,他引人 1^2(相当于 y, 而不是 x^2) 表 B 的钱数,根据题设列方程,得 $\frac{36}{35}x - \frac{59}{35}$; 他又设 1^2 表 C 的钱数(这里 1^2 相当于 z),则 $z = \frac{21}{20}x - 3\frac{9}{20}$, 最后得到解答. 从上述解题过程看, 许凯引入了未知量 $1^1, 1^2$, 但他没有列方程组, 而且用相同的 1^2 表两个未知量. 在西方, J. 比特奥 (Buteo) 最早引入不同的字母表示不同的未知量,并列出方程组,用加减消元法解题. 比特奥可能受到了许凯的影响,因为他了解拉罗什的工作.

2. 负数问题

《算术三篇》的根式部分提出了正、负数的全部运算法则。负数在东方国家如印度、中国较早地被使用,而在欧洲, 16—17 世纪的大多数数学家并不承认它是数, 或者即使承认了也并不认为它是

方程的根(文献[4],p.292). L. 斐波那契 (Fibonacci) 对负的量有初步的认识 (文献[6], p.108); 帕乔利知道负数的一些运算法则,如 $16-(-4)=+20$, $(4+\sqrt{6})(4-\sqrt{6})=10$ (文献[5],p.118); 14 世纪意大利的算术手稿中有负数的乘法运算法则(文献[6], p.16). 但许凯的负数运算法则的直接来源是什么,尚不清楚. 许凯还在该书中提出"负指数幂"的概念, 并以负数运算法则为基础,给出了负指数幂的计算方法. 另外,许凯有时接受负数解,因为它满足于方程(文献[1], p.202 第 14 题).

3. 未知量代替常数的思想

许凯虽然知道列方程和解方程的方法, 但他还寻找新奇的解法,并使之规则化. 在建立这种非常规的规则时,许凯用了未知量代替常数的思想. 他先用同一种特殊方法解几道类似的题, 题中的量均为具体数值;然后用未知量代替题中的一个数值,仍使用同一方法,这样便得到所需的规则. 未知量代替常数的思想很重要,它能使人们对问题做更一般的探讨.

值得指出的是: (1) 在《算术三篇》中, 许凯揭示了任意等比数列的一个性质: 设等比数列 $1, a_1, a_2, a_3\cdots$, 许凯令 a_1 为第一项, a_2 为第二项, …. 他说数列中的任一项如 a_m 自乘,则积为数列中的第 $2m$ 项; 数列中任意二项如第 m 项 a_m 与第 n 项 a_n 相乘,则积为第 $m+n$ 项. 该性质表明,许凯认识到乘法能转成加法.《问题集》第 94 题相当于一个指数方程

$$(0.9)^x=0.5.$$

许凯计算了 $x=1,2\cdots6,7$ 时 $(0.9)^x$ 的值, 在此基础上, 他用线性内插法求满足上式的 x 的近似值. 许凯的等比数列及指数方程虽然与对数有关系, 但他并没有发现对数. 数学史家评价说: 许凯瞥到了对数的幻像(文献[1],p.354). (2)许凯给出了表示根式、未知量乘幂的一般方法,如用 R^02, R^12, $R^22\cdots$等表示 $1,2,\sqrt{2}\cdots$;用 $2^0,2^1,2^2\cdots$表示 $1,2x,2x^2\cdots$. 这两种符号虽然没流传下来,但却反映了许凯在代数符号方面所做的努力. (3) 许凯发明了

"中间数"法则，例如，为了求大于 $\frac{1}{3}$ 而小于 $\frac{1}{2}$ 的数，将二数的分子、分母分别相加，所得二数分别做为分子、分母，得 $\frac{1+1}{2+3}=\frac{2}{5}$，即为所求. 运用这种方法，可找到无穷多个满足题目条件的数.此法则可用于求不尽根.

以上是许凯著作在理论上的成就.《几何》、《商业算术》体现了许凯著作的实用性，如《几何》讨论了标准的二维图形(圆、三角形、扇形)和三维图形(球、圆台)的测量，介绍了象限仪的结构和使用方法，以及酒桶体积的测量.《商业算术》讨论了合伙经商、分利问题、铸币问题等，它们所需的知识只是简单的加、减、乘、除和比例法(除一题使用代数法)。但在《几何》的许多题目中许凯使用了列方程和解方程的代数方法.

许凯对算术、代数的发展无疑做出了一定的贡献，他的书是中世纪较重要的著作，对当时的法国来说尤为如此. 1475—1485 年是法国实用算术发展的高潮时期，在这之前，法国的涉及代数的书主要有约翰 (John of Murs) 的《计算四章》(Quadripartitum numerorum) 和莱维本热尔松 (Levi ben Gerson) 的《数书》(Sefer ha mispar) [也称《计算技术》(Máaseh hosheb)]，但这两部书只含简单的方程(文献[7]，p.62)，在法国实用算术发展的高潮时期出现的几本算术书中，许凯的著作是唯一涉及代数的书.不过，他的书对后世的影响并不大，除拉罗什是其直接继承者外，其他人只是通过拉罗什间接地了解到许凯的工作，而且对他的工作有误解. 这是因为拉罗什虽提及许凯的根式和未知量乘幂的记号，但在他的工作中却没有使用，他还摒弃了许凯的用代数解决几何问题的方法. 另外，1500—1550 年间，法国实用算术衰落，影响了许凯工作的传播.

许凯的生平材料虽少，但他的学风及品德却跃然纸上. 例如，对一个数开方，如果开不尽，许凯便认为此数的方根是不完美的，因为近似值与理论值总存在差异，故这样的开方计算是无益的.在数学解题中，许凯常常寻求新奇、简洁的算法;同时，他也探求隐藏

在事物中的数学规律，如前述的将特殊算法规则化．许凯具有实事求是的治学精神．他说高次方程的求解有待于进一步努力，并说他给出的方程 $(0.9)^x = 0.5$ 的解不是令人十分满意的．

许凯的数学成就也许并不辉煌，但它却为欧洲当时薄弱的数学基础增添了一分力量，他值得人们永远纪念．

文　　献

原始文献

[1] G. Flegg, C. Hay, et al., Nicolas Chuquet, Renaissance mathematician, D. Reidel Publishing Company, 1985.

[2] H. L'Huillier, Nicolas Chuquet, La Géométrie, Première geométrie algébrique en langue francaise (1484), Paris, Vrin, 1979

研究文献

[3] L.C. karpinski, The history of arithmetic, Rand McNally & Company 1925.

[4] M. Kline, Mathematical thought from ancient to modern times, Oxford Univ. Press, New York, 1972.

[5] J.F. Scott, A history of mathematics, London, 1958 (中译本：J.F. 斯科特，数学史，商务印书馆，1981).

[6] C.Hay, Mathematics from manuscript to print 1300—1600, Clarendon Press, Oxford, 1988.

[7] J.E. Hofmann, The history of mathematics, New York, 1957.

帕　乔　利

王　青　建

（辽宁师范大学）

帕乔利，L.（Pacioli, Luca，或 Paciuolo，Luca di）约1445年生于意大利西部托斯卡纳（Toscana）区的圣塞波尔克罗（Sansepolcro）；1517年卒于圣塞波尔克罗．数学．

帕乔利的父亲叫巴尔托洛梅奥（Bartolomeo Pacioli），家乡位于意大利古代名城佩鲁贾（Perugia）以北台伯（Tiber）山谷中．有关他的早年生平史料极少，且不准确．一种说法是他受教于圣塞波尔克罗的贝福尔奇（Befolci）家族；另一种说法是他在其同胞、著名画家、数学家 P. della 弗兰切斯卡（Francesca）的画室中接受早期教育，因此被认为是弗兰切斯卡的学生．帕乔利约20岁时服务于一位住在上流社区的威尼斯富商 A. 龙皮安西（Rompiansi），为他的三个儿子当家庭教师，同时在 D. 布拉加迪诺（Bragadino）指导下研习数学．龙皮安西的商务经验与布拉加迪诺的文化知识成为他写作算术论著的基础．1470年他完成第一部算术手稿，题辞为"谨以本书献给龙皮安西兄弟们"．是年，老龙皮安西去世，帕乔利结束了这段教学生活，来到罗马，在建筑师 L. 巴蒂斯塔（Battista）门下工作．

不久帕乔利成为天主教方济各会修道士．完成神学学习后，他开始在意大利各地旅行和讲授数学．1477年为佩鲁贾大学开设算术课，1481年到札拉［Zara，现为扎达尔（Zadar），属南斯拉夫］教书，后辗转于那不勒斯、罗马等地．不仅教学取得很大成功，还写了一批有关的算术论著．约1487年回乡后潜心写作，于

1494 年出版名著《算术、几何、比与比例集成》(Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportiona lita)，这是印刷最早的数学书之一。

1497 年帕乔利应邀到米兰公爵 L. 斯福尔扎（Sforza）府上讲授数学，在那里遇到意大利文艺复兴时期的著名画家、科学家 L. 达·芬奇(da Vinci). 从达·芬奇留下的笔记中得知,达·芬奇曾就在科学研究中遇到的数学问题请教过帕乔利，而帕乔利此时完成的《神圣比例》第 1 卷是请达·芬奇画的插图. 1499 年法军入侵米兰,斯福尔扎被俘，帕乔利与达·芬奇结伴离开米兰,途经曼图亚（Mantua）和威尼斯,抵达佛罗伦萨.

1500 年帕乔利被指派到比萨大学讲授欧几里得《几何原本》. 第二年兼任波伦亚大学数学讲座. 1504 年他当选为罗马涅 (Romagna) 地区行政署官员,次年又成为佛罗伦萨修道院成员. 作为圣职人员,他曾在许多地方布道施教: 1508 年在威尼斯向教徒讲数学,1510 年在佩鲁贾,1514 年去罗马,后来又被任命为阿西西（Assisi）省教长,不久去世.

《算术、几何、比与比例集成》(以下简称《集成》)是帕乔利的成名之作，1494 年出版于威尼斯. 全书共 600 多页，用意大利文写成. 开篇题辞: 献给年轻的乌尔比诺（Urbino）公爵，G. da 蒙泰费尔特罗（Montefeltro, 1472—1508). 蒙泰费尔特罗被认为是帕乔利的学生，这一题辞体现出帕乔利与乌尔比诺宫庭间的密切关系. 弗兰切斯卡曾为乌尔比诺圣贝尔纳迪诺（San Bernardino）教堂(现在米兰)祭坛作了一幅画，其中将帕乔利描绘成殉道者圣彼得的化身. 另外一幅由 J. de' 巴尔巴里（Barbari）所作之画展示了帕乔利向蒙泰费尔特罗讲解几何证明问题的情形，该画现藏于那不勒斯博物馆,是帕乔利形象的主要依据.

《集成》是一部综合性的数学百科全书,分上、下两篇，内容包括理论算术和实用算术,代数基础，意大利各地使用的币值、重量和度量表,复式簿记法以及欧几里得几何学的概述,几乎包括了当

对算术、代数和三角学中的所有知识，被认为是继13世纪初L.斐波那契（Fibonacci）之后第一部内容全面的数学书。据研究，书中材料主要取自古希腊数学家欧几里得、罗马数学家A.M.S.博伊西斯（Boethius）、英国数学家J.de萨克罗博斯科（Sacrobosco）、意大利数学家斐波那契和P.de德贝尔达曼迪（Beldamandi）等人的著作，内容虽缺乏帕乔利本人的创见，但因其印刷后广泛流传，成为后继数学家学习和研究数学的经典。其中的主要成就如下：

（1）采用了较规范的印度-阿拉伯数码记数和计算，其中的数码形式与现代记法非常相象，对印度-阿拉伯数码在欧洲的流传普及起了一定作用。

（2）第一次以印刷形式给出手指记数的图示。手指记数古已有之，古埃及、罗马等地都有手指记数的文物残存。8世纪初的英国学者V.比德（Beda）曾专门阐述过手指记数计算的方法，帕乔利在书中不仅对比德的记数方法有所改进，而且绘制的手指记数图清晰简明，广泛流传，后来许多算术书和数学史专著都采用或借鉴了他的这幅插图。

（3）使用了大量数学符号（多为词语的缩写形式或词首字母），如归并符号、等号、幂符号、根号、未知量符号等，从而推进了代数学的发展。

（4）提出了高次方程求解问题。例如 $x^3+px=q$，$x^3+q=px$，$x^4+px^2=q$（p,q 为正数）等。帕乔利将这些问题列在书末，说它们像化圆为方问题一样难以解决。由于该书的权威性，这些问题引起了数学家们的极大兴趣。时隔不久，$x^3+px=q$（p，q 为正数）一类的三次方程就由波伦亚大学的数学家S.费罗（Ferro）解出，由此开了高次方程公式求解的先河。

（5）详尽论述了复式簿记。复式簿记1340年已在热那亚兴起，是会计登录的重要方法。帕乔利将它的论著"关于计算与记录"（De computis et scripturis）收入《集成》中，对当时流行的簿记知识进行了系统整理，并列举出簿记4大特点，被认为是关于

复式簿记的最早文献.

此外,《集成》中关于二次代数方程,算术四则运算和应用题负解的探讨亦有一定影响.

《集成》于 1523 年在托斯科拉诺 (Toscolano) 出了第二版,只对原著作了个别文字修订. 1543 年被译为英文,影响开始超出欧洲大陆. 16 世纪,《集成》对欧洲数学的发展起了重要的推动作用. G. 卡尔达诺 (Cardano) 在《实用算术》(1539)中专辟一章纠正《集成》中的错误,并承认他受惠于帕乔利. N. 塔尔塔利亚 (Tartaglia) 在他的名著《论数字与度量》(1556—1560)中遵循了帕乔利《集成》的风格. 另一数学家 R. 邦贝利 (Bombelli) 在其《代数学》的引言中称,帕乔利是斐波那契之后第一位阐明代数科学的数学家.

《集成》是帕乔利进行数学研究的成果汇总. 在此之前,他已分别在威尼斯(1470)、佩鲁贾(1478)和扎拉(1481)写过三种用于教学的数学论著,均未出版. 现在只有第二种保存下来.《集成》之后他又写了几部论著,其中较有影响的是《神圣比例》.

《神圣比例》(Divina proportione)约 1497 年写于米兰,1509 年出版于威尼斯. 这部用意大利文写成的著作包括 3 卷: 第 1 卷是"神圣比例概要" (Compendio de divina proportione), 1497 年完成于米兰. 文中论述"黄金分割"的性质,帕乔利称之为"神圣比例",即分已知线段为两部分,使其中一部分是全线段与另一部分的比例中项,亦称中末比. 该卷包含欧几里得几何中与黄金分割有关的部分概述,以及正多面体和半正多面体性质的讨论. 第 2 卷是"论建筑学" (Tractato de l'architectura), 基于古罗马建筑学家 P. M. 维特鲁维厄斯 (Vitruvius, 约公元前 25)的《建筑学》而成,为此增加了罗马数字表示正比例的论述. 第 3 卷是"比例论",是弗兰切斯卡比例论著的意大利译本. 从几何学观点看,《神圣比例》比《集成》更有价值. "神圣比例"一词的创用使人们对黄金分割产生顶礼膜拜的心境.

1509 年,帕乔利在威尼斯出版了他的第三部书——欧几里得

《几何原本》的拉丁文翻译本.《几何原本》的拉丁文译本早在13世纪已由坎帕努斯(Campanus of Novara)从阿拉伯文译出,1482年又有了最早的印刷本. 1505年B. 赞贝蒂(Zamberti)直接从希腊文本将《几何原本》译为拉丁文,并对坎帕努斯的译本进行了严厉批评. 帕乔利对此颇感不平. 他的译本基于坎帕努斯的译本,加了若干自己的校订和注释. 后来他又将《几何原本》译为意大利文,可惜一直未能出版,手稿也不知去向.

帕乔利还有一份数学遗著传世,现存于波伦亚大学图书馆中,共有309页. 手稿分为3部分: 第一部分是81道数学游戏题汇编,比后来被称为数学游戏先驱的法国数学家C.G. 巴歇(Bachet de Méziriac)等人的同类汇编还要大,时间上也早一个多世纪;第二部分是几何问题和几何游戏汇编; 第三部分是谚语和诗句的汇编. 内容上无独创性,问题也多取自达·芬奇等人的著作,影响不大. 但帕乔利的论著已成为历史学家研究达·芬奇的重要原始材料.

帕乔利虽然对数学本身缺乏创建,但其著作具有简明、通俗和综合的特点,因而广泛流传. 特别是用意大利文印刷发行,对他本国人民学习这些知识提供了很大方便. 16世纪意大利的代数学有长足发展,其间帕乔利著作的教育和启示作用是不能忽视的.

文　　献

原始文献

[1] L. Pacioli, Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita, Venice, 1494; 2版, Toscolano, 1523.
[2] L. Pacioli, Divina proportione, Venice, 1509.
[3] L. Pacioli, Euclid megarensis opera, ..., Venice, 1509.

研究文献

[4] G. M. Biggiogero, Luca Pacioli e la sua 'Divina proportione', *Rendiconti dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, ser. A,* 94(1960), pp. 3—30.
[5] D. I. Ricci, Luca Pacioli, l'uomo e lo scienziato, Sansepolcro, 1940.
[6] R. E. Taylor, No royal road: Luca Pacioli and his time, Chapel Hill, N. C., 1942.
[7] L. Olschki, Geschichte der neusprachlichen wissenschaftlichen Literatur. I,

Leipzig, 1919, pp. 151—239.
[8] S. A. Jayawardene, Pacioli, Luca, 见 Dictionary of scientific biography, Vol. 10, 1974, pp. 269—272.
[9] S. Morison, Fra Luca Pacioli of Borgo San Sepolcro, New York, 1933.
[10] R. Brown, A history of accounting and accountants, London, 1905, pp. 108—131.

塔尔塔利亚

王 青 建

（辽宁师范大学）

塔尔塔利亚，N. (Tartaglia, Niccolò) 约 1499 年生于意大利布雷西亚 (Brescia)；1557 年 12 月 13 日卒于威尼斯. 数学、机械学、军事科学、测量学.

塔尔塔利亚原姓丰坦那 (Fontana)，生于一贫困邮差家庭. 7 岁时父亲米歇尔 (Michele) 去世. 13 岁又遭骚乱之难，在布雷西亚大教堂内躲避战争时，被攻占的法军将头部砍伤多处(另一说他 6 岁遭此难). 后经母亲细心照料痊愈，但留下口吃病根，人们因此将绰号塔尔塔利亚 (Tartaglia，意为口吃者)冠于其名前. 他本人也以此为姓发表文章，沿用至今.

塔尔塔利亚约在 14 岁时开始上学，但只读了两个星期的书，就因无钱交纳学费而辍学. 从此在母亲指导下进行自学，逐渐掌握了拉丁文和希腊文，并对数学产生浓厚兴趣. 他勤于钻研，进步很快，约 17 岁(另一说 22 岁)就当上了维罗那 (Verona) 的算盘教师. 后来还负责一个小学的事务. 成家后经济每况愈下，1534 年移居威尼斯，成为那里的数学教师. 除教学外，还在教堂讲授公开课，并继续数学等学科的研究，相继出版了多种学术著作. 1546年获讲师资格. 1548—1549 年回到家乡布雷西亚，在附近村子的中学里教数学. 以后仍回威尼斯教学，直至去世.

塔尔塔利亚最重要的数学成果是发现了三次方程的代数解法. 遗憾的是，他的所有著作都没有给出这种解法，仅在别人的著作里留下片断记载. 但是对发现这一方法的过程以及围绕它所发

生的多次争论，塔尔塔利亚却做过详细的描述。

1494 年，数学家 L. 帕乔利（Pacioli）在他的著作中提出了几类三次和四次方程，说这些方程的求解像化圆为方问题一样困难，并推测它们可能不存在一般解法。但在 16 世纪初，波伦亚（Bologna）大学的数学教授 S. del 费罗（Ferro）就解出了其中一类缺少二次项的三次方程 $x^3+px=q$，不过受当时保密风气的影响，他没有发表这一解法，只秘传给了他的学生 A. M. 菲奥尔（Fior，威尼斯人）等少数人。菲奥尔同样没有发表它，而准备将它用于时尚的公开竞赛，以便出奇制胜。

1530 年，布雷西亚的一位教师 Z. de 科伊（Coi）向塔尔塔利亚提出两个问题，分别导致三次方程 $x^3+3x^2=5$ 和 $x^3+6x^2+8x=1000$。塔尔塔利亚经过研究找到了前一种方程(缺少一次项)的一般解法，得到正实根。当然也是秘而不宣。几年后，菲奥尔听说塔尔塔利亚会解三次方程，深表怀疑。他自恃掌握 $x^3+px=q$ 的解法，就向塔尔塔利亚提出挑战，要求公开竞赛。塔尔塔利亚得知菲奥尔曾获费罗的秘传后，便潜心钻研，终于在竞赛前 8 天(另一说前 10 天)找到了这一类方程的解法。1535 年 2 月 22 日，双方在威尼斯公开竞赛，各自向对方提出 30 个问题。菲奥尔的问题都导致 $x^3+px=q$ 类型的方程，塔尔塔利亚在两个小时内全部解出来了。而塔尔塔利亚的问题多数导致 $x^3+mx^2=n$ (m,n 为正数)类型的方程，菲奥尔一个也没解出。塔尔塔利亚因这次公开竞赛大获全胜而轰动一时，扬名整个意大利。到 1541 年他已得到 $x^3\pm px^2=\pm q, x^3\pm px=\pm q$ (p,q 为正数)几类三次方程的解法。他准备以后写一部有关的数学专著公布这些解法，然而这一计划却被一名叫 G. 卡尔达诺（Cardano）的数学家打乱了。

卡尔达诺是米兰的一位医生，业余研究数学。他听到塔尔塔利亚竞赛获胜的消息时正在为自己写的一本代数书搜集材料，因此便在 1539 年 1 月托人向塔尔塔利亚讨教三次方程的解法，遭到塔尔塔利亚的拒绝。此后卡尔达诺又数次写信恳求，还邀请塔尔

塔利亚来米兰做客,说一位名流想要见他. 1539 年 3 月塔尔塔利亚到达米兰，没有见到这位名流，却被卡尔达诺留在家中住了三天. 在卡尔达诺百般请求并发誓保密的前提下，塔尔塔利亚将方程 $x^3+px=q$ 和 $x^3+q=px$（p, q 为正数）的解以暗语般的 25 行诗歌形式告诉了卡尔达诺，其中没有任何证明. 塔尔塔利亚回家后忙于他的欧几里得（Euclid）和阿基米德（Archimedes）著作的翻译. 卡尔达诺却在塔尔塔利亚的解法引导下，找出了各种类型三次方程的解法及其证明,并在 1545 年出版的《大术》(Ars magna）中将它们发表出去. 虽然卡尔达诺写明了方法源于塔尔塔利亚,并指出费罗也早已发现了 $x^3+px=q$ 类方程的解法,但失信的行为仍然激怒了塔尔塔利亚，因此展开一场激烈的论战.

1546 年,即《大术》出版的第二年，塔尔塔利亚在威尼斯出版了一部题为《各种问题和发明》（Quesiti et inventioni diverse）的著作. 其中以对话和书信等记实方式陈述了他与科伊、菲奥尔、卡尔达诺等人的交往经历和三次方程解法的发现过程，对卡尔达诺的行为进行了斥责. 卡尔达诺对此保持缄默，而他的仆人和学生、四次方程代数解法的发现者 L. 费拉里（Ferrari）代替主人出面,于 1547 年 2 月公开散发挑战书，要求与塔尔塔利亚进行为期 30 天的竞赛. 塔尔塔利亚同样公开散发了他的回答信,要求与卡尔达诺本人直接辩论. 自此到 1548 年 7 月,费拉里与塔尔塔利亚先后通信 12 封,各自向对方提出 31 个问题,后又互相指责对方的解答有误. 这些问题涉及算术、代数、几何、地理、天文、建筑和光学等许多领域,已成为科学史上的珍贵文献.

塔尔塔利亚因自己有口吃缺陷,开始不愿意进行公开辩论,更不愿与费拉里交战. 后来可能是掌握了费拉里解答中的错误，便在 1548 年 6 月的信中接受了挑战. 1548 年 8 月 10 日,两人在米兰大教堂附近举行了公开辩论. 塔尔塔利亚批驳费拉里解答中的错误，但发言常被聚集在那里的费拉里追随者打断. 费拉里则强调塔尔塔利亚有一个不能解答的问题(指四次方程). 争论从上午 10 点持续到晚饭时间,听众一哄而散，结果不了了之. 塔尔塔利

亚因听众和裁判不公，第二天便返回了布雷西亚。也有材料说塔尔塔利亚是败北而去，并因此而失去讲师职位。还有的说双方各自宣布获胜。直到 8 年后塔尔塔利亚才在他的名著《论数字与度量》(General tsattato di numeri et misure) 中的一篇插文里叙述了整个论战过程。该书的前两部分发表于 1556 年，第三部分在塔尔塔利亚去世 3 年后的 1560 年才出版，是未完成本。塔尔塔利亚想在书的最后一部分阐述他的三次方程解法及相关理论，最终未能如愿。后来由于《大术》的影响，三次方程的解法冠以"卡尔达诺公式"流传开来。

塔尔塔利亚对 $x^3+px=q$ 的解可在卡尔达诺的著作中见到片段。他引入了两个新的变量(用现代符号表示) u,v，并设

$$u^3-v^3=q,\ (uv)^3=\left(\frac{1}{3}p\right)^3.$$

由此可推出

$$u^3=\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3},\ v^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

再由 $x=u-v$ 即可求出原方程的解为

$$x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

卡尔达诺用几何方法证明了 $x=u-v$ 成立，而塔尔塔利亚对此是怎样证明的已无从考证了。

《论数字与度量》(1556—1560)是塔尔塔利亚最重要的数学著作。书中包括大量商业算术、数值计算和圆规几何等初等数学多个分支的理论，被称为数学百科全书和 16 世纪最好的数学著作之一。其中给出的由二项式展开系数排成的三角形被称为"塔尔塔利亚三角形"，比 B. 帕斯卡 (Pascal) 发表它的时间(1665)要早 100 多年。不过在塔尔塔利亚之前已有许多人论述过这种三角形，目前已知最早的人是中国的贾宪 (约 1100)。

塔尔塔利亚在几何学中的贡献是，发现已知四面体的边长求其体积的方法，以及内切于一已知三角形且两两外切的三个圆[现

在称为马尔法蒂（Malfatti）问题]的作图法．他的数学贡献还涉及算术基础研究，根的开方法，分母有理化，组合分析术，概率论和数学游戏，智力训练等等．

1543 年塔尔塔利亚翻译注释的欧几里得《几何原本》出版了，这是该书的第一种意大利文译本(译自两种拉丁文本)，也是它首次以现代语言印刷的译本．同年，他又出版了阿基米德 4 部著作的拉丁文翻译本． 8 年后(1551)还注释出版了阿基米德著作的意大利文译本，显示出他良好的语言学基础和希腊数学知识．此外他还翻译过阿波罗尼奥斯（Apollonius）和海伦（Heron）等人的著作，对希腊数学的保存与传播做出贡献．

《新科学》（Nova scientia, 1537）是塔尔塔利亚的著作中较早出版的一部．他首次将数学应用于射击理论，发现一种用于动力学和运动学的数学方法，使该书成为研究自由落体运动和抛射体运动的开拓性著作，对 G. 伽利略（Galilei）等物理学家的工作颇有影响．书中还设计了两种超高和超距的测量装置，被后人誉为“第一代遥测仪”． 1546 年塔尔塔利亚在《各种问题和发明》中进一步讨论了抛射体问题，得出如下重要结论：抛射体轨迹在每一处都是弯曲的线；初始速度给定时，当抛射体具有 45° 抛射角时射程最大．他还在弹道学研究中提出一些新的观点和方法，制作了射击表，并对防御工程的构筑提出自己的见解，是一位在军事科学的理论和实践中都有贡献的科学家．其中有些成果很快就被翻译介绍到德(1547)、法(1556)等国．此外，塔尔塔利亚对测量方法、沉船提升、天气预报、天平平衡、斜面上重物的平衡等问题都有研究，还提出静力学中的一些基本观点，补充了前人的结论．有关论著大部分是在威尼斯出版的．

塔尔塔利亚培养了许多学生，如 G.B. 贝内代蒂(Benedetti)，M. 波维亚诺（Poveiano)，G.A. 鲁斯科尼（Rusconi）等，他们在数学、力学等方面继承并发展了塔尔塔利亚的理论，使之在意大利乃至整个欧洲产生广泛影响．

文　献

原始文献

[1] N. Tartaglia, Quesiti et inventioni diverse, Venice, 1546; Brescia, 1959.

[2] N. Tartaglia, Risposte (to Lodovico Ferrari), 6 pts, 1—4, Venice, 1547; 5—6, Brescia, 1548.

[3] N. Tartaglia, General trattato di numeri et misure, 6 pts, Venice, 1556—1560.

[4] A. Masotti, (N. Tartaglia) Cartelli, Brescia, 1974.

研究文献

[5] B. Boncompagni, Intorno ad un testamento inedito di N. Tartaglia, 见 Memoriam Dominici Chelini-Collectanea mathematica, Milan, 1881, pp. 363—412.

[6] A. Favaro, Di N. Tartaglia e della stampa di alcune sue opere con particolare riguardo alla "Travagliata inventione", *Isis*, **1**(1913), pp. 329—340.

[7] A. Masotti, Taraglia, Niccolò, 见 Dictionary of scientific biography, Vol. 13, 1980, pp. 258—262.

[8] P. L. Rose, The Italian Renaissance of mathematics, Librairie Droz, 1975, pp. 151—158

[9] M. A. Nordgaard, Sidelights on the Cardan-Tartaglia controvesy, *National Mathematics Magazine*, 12(1937), pp. 327—346.

卡尔达诺

王青建

(辽宁师范大学)

卡尔达诺，G.（Cardano, Girolamo） 1501年9月24日生于意大利帕维亚（Pavia）；1576年9月21日卒于罗马．数学、医学、物理学、哲学、星占学．

卡尔达诺姓名的英文拼法是 Cardan, Jerome，译为“卡当”，常以此通用．例如解一般三次方程的“卡当公式”等．

卡尔达诺是一个法官和一个寡妇的私生子．自幼体弱多病，备受歧视和虐待，性格冷漠倔强．父亲法齐奥（Fazio Cardano, 1444—1524）博闻饱学，在米兰讲授过法学和医学，曾与意大利文艺复兴时期的著名画家、科学家达·芬奇（Leonardo da Vinci）为友．受父亲的鼓励，卡尔达诺开始学习古典文学、数学和星占学．1520年在帕维亚上大学时又学习医学．后转学于帕多瓦，1526年毕业，取得医学博士学位，继而在帕多瓦附近的一个小镇萨科隆戈（Saccolongo）行医近6年．1531年与L．班达雷妮（Bandareni）结婚，生有二子一女．

婚后不久，卡尔达诺因收入微薄，难以支撑不断扩大的家庭，被迫搬到米兰居住以谋公职．但由于他是私生子，米兰医学协会认为这是出身卑贱，拒绝他加入该协会．卡尔达诺只好独自开业行诊，生活十分拮据．1534年由父亲的一个贵族朋友举荐，卡尔达诺成为米兰专科学校的一名数学教师，在那里讲授几何学．同时任贫民院的医生，生活略有好转．他除了教学和诊病外，还潜心医学研究，自1536年起在威尼斯等地出版了几部专著，阐述一些

理论问题，总结行医经验，还揭露过医学界的某些劣行．由于他的医术高超，逐渐在米兰取得声望． 1539 年米兰医学协会重新决定接纳他为该协会正式会员． 同年卡尔达诺转到米兰的医学院任教，不久成为该院的负责人． 1543 年又到帕维亚大学任医学教授．几年之内，成为闻名全欧的医生． 1552 年还专程到英国爱丁堡为大主教 J 哈密顿（Hamilton）及其他达官显贵治病．

1560 年，卡尔达诺宠爱的大儿子因犯“毒死妻子罪”被处决，对他的精神打击很大．当时，卡尔达诺的小儿子也生活放荡，桀骜不驯．为摆脱烦恼，卡尔达诺谋到波伦亚（Bologna）大学医学教授的职位，1562 年正式赴任．

卡尔达诺的坎坷经历使他的性格颇为奇特，因而常常被描述为科学史上的怪人．他在数学、哲学、物理学和医学中都有一定成就，同时也一直醉心于占星术和赌博的研究． 1570 年因给耶稣算命（说耶稣的一生都是受天上星宿的支配）而受到宗教法庭监禁，被起诉为异教徒(另一说是因为债务问题被捕入狱，还有的说二者兼而有之)．几个月后，宣誓放弃异端学说获释出狱，但失去了教学职位和学术出版权． 1571 年移居罗马，另谋生计．后因星占学研究得到教皇皮乌斯五世的赏识，付给他终身年薪，留在皇宫供职．在生命的最后一年(1576)，卡尔达诺写下了自传体著作《我的生平》(De propria vita liber···, 1643 年在巴黎出版)．该书以自我批评的口吻剖析了他自己的一生，是研究卡尔达诺的主要材料之一．

卡尔达诺被誉为百科全书式的学者，一生共写了各种类型的文章、书籍 200 多种．现存的材料就有约 7000 页．他智力超群，性情孤僻，职业动荡多变，著述鱼龙混杂．除了作为正式职业的著名医生、医学教授、占星术士引起注意外，就他的贡献而言，人们也常把他称为数学家、哲学家、物理学家，或者笼统地称之为科学家．

卡尔达诺的数学贡献表现在他对算术和代数的研究．1539年

他首次出版了两本算术演讲书，其中较重要的一部是在米兰刊行的《算术实践与个体测量》(Practica arithmetice et mensurandi singularis)。书中主要用数值计算来解决实际问题，在一些计算方法、代数变换中显示出较高技巧。当时的代数没有符号，仅靠文字叙述来表示解题过程，称为"文词代数"。对于高于二次的代数方程，一般是没有解决办法的。卡尔达诺在书中列专题论述了多种方程的解法，甚至求得一些特殊三次方程的解。例如：对方程(用现代符号表示) $6x^3 - 4x^2 = 34x + 24$，两边同时加上 $6x^3 + 20x^2$，合并后得：

$$4x^2(3x + 4) = (2x^2 + 4x + 6)(3x + 4),$$

两边同除以 $3x + 4$，则由二次方程解得原方程的一个正根 $x = 3$.(按当时的习惯，一般不承认方程有负根，解出一个正根就认为是解完了方程。)

卡尔达诺最重要的数学著作是 1545 年在纽伦堡出版的《大术》(Ars magna)。全名为《大术，或论代数法则》(Artis magnae, sive de regulis algebraicis liber unus)。该书系统给出代数学中的许多新概念和新方法。例如：三、四次代数方程的一般解法；确认高于一次的代数方程多于一个根；已知方程的一个根将原方程降阶；方程的根与系数间的某些关系；利用反复实施代换的方法求得数值方程的近似解；解方程中虚根的使用等等。其中在数学史上较为重要而又颇有争议的是三次代数方程的一般解法。

早在 1510 年左右，波伦亚大学的教授 S. del 费罗 (Ferro) 就发现了缺少二次项的三次方程 $x^3 + px = q$ (p,q 均为正数)的解法，并在逝世之前透露给他的学生 A. M. 菲奥尔 (Fior, 威尼斯人)。后来，出生于意大利北部布雷西亚 (Brescia) 的数学教师 N. 塔尔塔利亚 (Tartaglia) 于 1530 年得到另一类缺少一次项的三次方程 $x^3 + px^2 = q$ (p,q 为正数)的解法。1535 年，菲奥尔得知塔尔塔利亚会解三次方程后并不相信，就向他提出挑战，要求进行公开竞赛。塔尔塔利亚为此潜心钻研，终于在比赛前得到 $x^3 + px = q$ 和 $x^3 = px + q$ (p,q 为正数)两类方程的解法，从而在比

赛时解出了菲奥尔提出的全部 30 个问题．反之，塔尔塔利亚提出的问题多数导致对方不会解的 $x^3 + px^2 = q$ 类型的方程，因而塔尔塔利亚大获全胜．受此鼓舞，塔尔塔利亚继续研究三次方程的解法，到 1541 年已发现 $x^3 \pm px^3 = \pm q$ 和由此变换而得到的 $x^3 \pm mx = \pm n$（m, n 为正数）等多种类型的方程的一般解法．他准备写一本包含这些解法的代数书传于后世，但这一设想被卡尔达诺打乱了．

卡尔达诺当时也在研究方程问题，准备写一部关于代数问题的专著．当他得知塔尔塔利亚与菲奥尔竞赛获胜的消息后，便托人打听塔尔塔利亚的方法． 1539 年又亲自写信讨教，并邀请塔尔塔利亚到米兰．这年 3 月塔尔塔利亚来到后，卡尔达诺经过当面再三恳求并发誓对此保密，塔尔塔利亚才把他关于方程 $x^3 + px = q$ 和 $x^3 + q = px$ 的解法写成一首 25 行诗告诉卡尔达诺．此后，卡尔达诺从各方面详细研究了塔尔塔利亚的解法，并以此为线索，得出各种类型三次方程的解法．他将这些解法收在《大术》中发表出去，同时补充了各种方法的证明．在《大术》第 11 章“关于一个立方和未知量等于一个数”（De cubo & rebus aequalibus numero，相当于方程 $x^3 + px = q$）中，卡尔达诺一开始就申明：“费罗约在 30 年前发现了这一法则并传授给菲奥尔，后者曾与也宣称发现该法则的塔尔塔利亚竞赛．塔尔塔利亚在我的恳求下将方法告诉了我，但没有证明．在这种帮助下，我克服了很大困难找到了证明，现陈述如下……．”由此可以看出，卡尔达诺知道费罗早已发现这类方程的解法，或许觉得没有保密的必要，才将它发表出来．虽然卡尔达诺写明了方法的来源，但失信行为仍然激怒了塔尔塔利亚．塔尔塔利亚在第二年写成的《问题》（Quesiti, 1546）一书中强烈谴责了卡尔达诺．1547 年卡尔达诺的仆人和学生 L. 费拉里（Ferrari）代替主人向塔尔塔利亚进行论战，在近两年的时间里先后通信 12 封，各自向对方提出 31 个问题，后又相互指摘对方的解法有误．塔尔塔利亚原想与卡尔达诺本人进行直接辩论，但卡尔达诺却始终没有再与他通信或见面． 1548 年 8 月 10 日，塔

尔塔利亚与费拉里在米兰大教堂附近进行了公开交锋．塔尔塔利亚批驳费拉里解答中的错误，而费拉里则强调塔尔塔利亚有一个不能解决的问题．辩论从上午 10 点持续到晚饭时间，结果不了了之．最后由于《大术》的影响，三次方程的解法还是冠以“卡当公式”或“卡尔达诺公式”流传开来．

卡尔达诺在《大术》中借助于几何图形的证明并以方程 $x^3+6x=20$ 为例阐述了解三次方程的方法．对于方程 $x^3+px=q$，卡尔达诺在“法则”（Regula）中得出的求解公式为（用现代符号表示）

$$x=\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{1}{3}p\right)^3+\left(\frac{1}{2}q\right)^2}+\frac{1}{2}q}-\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{1}{3}p\right)^3+\left(\frac{1}{2}q\right)^2}-\frac{1}{2}q}.$$

他的证明实质上是引入 u，v 两个量，并令 $u^3-v^3=q$ 以及 $(uv)^3=\left(\frac{1}{3}p\right)^3$，然后推出 $x=u-v$．他将 u^3，v^3 看成是立方体的体积，其边长分别为 u 和 v，而乘积 $u\cdot v$ 是两个边长所形成的矩形，其面积为 $\frac{1}{3}p$．这样，$u^3-v^3=q$ 意味着两个体积之差等于 q，x 就等于两个立方体边长之差，即 $x=u-v$．借助几何方法可推得

$$x^3=(u-v)^3=u^3-v^3-3(u-v)\cdot u\cdot v=q-px.$$

即为原方程．此外，卡尔达诺还解出 $x^3=px+q$，$x^3+px+q=0$，$x^3+q=px$ 三种类型的三次方程，对含有二次项的方程，卡尔达诺给出具体消去二次项的方法． 例如对 $x^3+6x^3=100$，令 $x=y-2$，代入后化为 $y^3=12y+84$．这已是目前解三次方程的重要步骤之一．卡尔达诺在《大术》第 17—23 章中专门讲述了处理一般三次方程（四项俱全的方程）的方法，使之对任意三次方程均可求解．

《大术》的另一重要成果是在第 39 章中记载了费拉里发现的

四次代数方程的解法."求三个成连续比例的数,其和为 10,前两个数的积为 6."该题导致方程 $\frac{6}{x}+x+\frac{x^3}{6}=10$ 或 $x^4+6x^2+36=60x$(卡尔达诺习惯于把他的方程写成各项系数都是正数的形式.)书中以此为例阐述了费拉里的方法,并给出主要步骤的几何证明.这是一般四次代数方程解法的最早记载.

卡尔达诺在《大术》第37章中专门讨论了解方程中遇到的虚根问题.通俗的例子是"将 10 分成两部分,使其乘积为40".他将解答 $(5+\sqrt{-15})\cdot(5-\sqrt{-15})=25-(-15)=40$ 写成式子

5p:Rm:15

5m:Rm:15

25m:m:15qd.est40,

用 R 表示平方根,p 表示加,m 表示减. 对于求解中产生的负数的平方根,卡尔达诺首次把它当作一般的数进行运算.他还认识到如果一个方程有一个虚根,则应该有与之共轭的另一个虚根.

卡尔达诺在《大术》中观察到方程的根与系数的关系以及系数符号的连续性与根的符号间的关系. 他还在 1539 年 8 月的一封信中讨论了方程的不可约情形,即根是不同的实数,而根的表达式中却出现虚数的情形.后来又在 1570 年《大术》的一个新版本中加了一节,专门论述三次方程的不可约情形.但他并没有解决这一问题.卡尔达诺在欧洲还是第一个允许二次方程和三次方程负根存在的人,并首次发现三次方程有三个(实)根.这些工作被认为是代数方程理论的早期成果.

卡尔达诺长期醉心于游戏和赌博,掷骰、弈棋、打牌无所不从.他早在 1539 年的著作中就论及赌金分配问题,另外又写成经验之谈式的专著《游戏机遇的学说》(Liber de ludo aleae).这部著作直到 1663 年才收入在莱顿出版的 10 卷本卡尔达诺《全集》(Opera omnia)中第一次发表.书中给出一些概率论的基本概念和定理,得到所谓"幂定理"(某事件重复 n 次发生的概率)和大数定律.但这些理论发表得较晚,对后世影响不大.

卡尔达诺被誉为16世纪文艺复兴时期人文主义的代表人物.他试图将现实中的一切统一在一种体系中，因此除了发表过多学科的文章、专著外，还出版了两部百科全书式的综合性著作《事物之精妙》(De subtilitate libri, 21卷, 1550)及其补充《世间万物》(De rerum varietate libri, 17卷, 1557). 书中包括大量力学、机械学、天文学、化学、生物学等自然科学与技术的知识，还有密码术、炼金术以及占星术等内容.其中的一些科学观点与达·芬奇的论述颇为相似，或许卡尔达诺曾受到这位科学和艺术大师手稿的启迪. 这两部著作仅在16世纪就有十几个版本流传,后来又被译为多种文字,影响深远.

1570年卡尔达诺在《论运动、重量等的数字比例》(Opus novum de proportionibus numerorum, motuum, ponderum,···)中提出,斜面上支持一个物体所需要的力与斜面的倾角成正比,并以新的方式论述了天平平衡的条件. 他设计了许多机械装置，其中著名的有"卡尔达诺悬置","卡尔达诺接合","卡尔达诺轴"等. 他还仔细观测了抛射体的运动，指出这种运动的轨迹类似于抛物线. 并由此断言：除天体外，物体不可能有永恒的运动. 卡尔达诺是实验物理学的先驱者之一,曾尝试用定量的方法研究物理学.他假设枪弹在空气和水中通过的距离反比于它们的密度，然后通过实际测量来确定两者的密度比值. 他还在流体动力学中用观察实验的方法得出与当时流行观点相反的结论：流体中高水位比低水位运动的速度快.

卡尔达诺还被称为自然哲学家. 当时欧洲解释自然界仍采用古希腊的四元学说,即世间万物都是由火、水、土和空气生成的,这四种物质被称为"要素"或"基本元素". 卡尔达诺将四元减为三元,去掉了火，又将四元素所产生的"四种基性"——"热"、"干"、"冷"、"湿"减为两种，只留下"热"和"湿"，并试图用"赞同"和"厌恶"说明自然现象. 不过他的"三元"学说和"两种基性"学说影响不大.

在地质学方面，卡尔达诺指出山岳的形成是由于流水的腐蚀

造成的。他还指出：在陆地上发现的海生物化石表明，该地域是由海底逐渐上升而形成的。他最早提出水的循环理论，即下落的雨水汇成小溪流入河中，河水又流入海中，海水受阳光照射蒸发，化为水蒸气形成云，再成为雨水落到地面，如此构成永恒的循环。这些理论对地质学的发展有重要影响。

作为著名医生，卡尔达诺不仅精于诊断和开方用药，而且外科手术技艺高超。他还在理论上第一个记载了斑疹伤寒病的治疗方法，并对生理学和心理学的一些问题提出自己的见解。虽然作为赌徒和占星术士留下的名声不太好（甚至传说卡尔达诺为了证实他对自己死期占卜的正确而在预言的那天自杀身亡），但他的著作在 16 世纪下半叶及后来被许多学者引用。由此可见，卡尔达诺作为一个科学家的影响是很大的。

文　献

原始文献

[1] G. Cardano, Opera omnia, Charles Sponi, ed., 10 vols., Leiden, 1663.

[2] G. Cardano, De propria vita liber…, Gabriel Naudé, Paris, 1643; 意大利文, Milan, 1821, Turin, 1945; 英文, New York, 1930.

研究文献

[3] A. Bellini, Girolamo Cardano e il suo tempo, Milan, 1947.

[4] M. Fierz, Girolamo Cardano, Birkhäuser Boston, 1983.

[5] M. Gliozzi, Cardano, Girolamo, 见 Dictionary of scientific biography, Vol. 3, 1971, pp. 64—67.

[6] H. Morley, The life of Girolamo Cardano of Milan, Physician, 2 vols., London, 1854.

[7] E. Bortolotti, I contributi del Tartaglia, del Cardano, del Ferrari e della scuola mathematica bolognese alla teoria algebrica della equazioni cubiche, no. 9 in the series Studi e Memorie per la Storia dell' Università di Bologna, Bologna, 1926, pp. 55—108.

[8] P. Cossali, Origine e trasporto in Italia dell'algebra, II, Parma, 1797, pp. 159—166, 337—384.

[9] P. L. Rese. The Italian Renaissance of mathematics, Librairie Droz, 1975, pp. 143—150.

[10] O. Ore, Cardano the gambling scholar, Princeton, 1953.

[11] M. A. Nordgaard, Sidelights on the Cardan-Tartaglia controversy, *National Mathematics Magazine*, 12(1937), pp. 327—346.

邦　贝　利

王　青　建
（辽宁师范大学）

邦贝利，R.（Bombelli, Rafael） 1526年1月生于意大利波伦亚；1572年卒。数学。

邦贝利的父亲A. 马佐利（Mazzoli）是从帕尼加莱镇（BorgoPanigale）移居波伦亚的羊毛商，母亲D. 斯库迪耶里（Scudieri）是一个裁缝的女儿。邦贝利在6个孩子中居长。上中学时老师曾建议他到波伦亚大学深造，但由于家庭原因未能实现。他于1551年前开始从事水利设计工作，受雇于一个叫M. A. 鲁菲尼（Rufini）的罗马贵族，主要任务是参与基亚纳河谷（Val di Chiana）沼泽地的开垦。出色的工作使他赢得与工程师齐名的声望。开垦工作于1556—1560年中断，邦贝利利用这段时间在鲁菲尼的罗马别墅中写作专著《代数学》（Algebra）。1560年回到基亚纳河谷完成了那里的工作。后来又参与一些工程工作。

《代数学》是邦贝利留下的唯一数学论著。该书共有5卷，初稿完成于1560年以前。约在1570年邦贝利对他的初稿做了补充修订。1572年在波伦亚出版了前3卷，题为《代数学的主要部分——3卷本算术》（L'Algebra parte maggiore dell' aritmetica divisa in tre libri）。1579年在波伦亚再版了这3卷，书名改为《代数著作》（L'Algebra opera）。邦贝利在世时没有发表该书的后2卷。他曾计划进一步修订全书，特别是后2卷，但因早逝未能如愿。其手稿直到1923年才被发现，1929年在波伦亚出版，题为

《代数学,波伦亚的拉斐尔·邦贝利著作第IV和V卷》(L'Algebra, opera di Rafael Bombelli da Bologna, Libri IV e V)。一般都将这5卷简称为《代数学》。

《代数学》卷I定义了一些基本概念及运算,如幂、根、二项式、三项式等;卷II引入了代数乘方及其记法,然后讨论了1—4次方程的求解;卷III将卷II中的方法应用于实际例子;卷IV阐述几何方法在代数中的应用;卷V则用代数方法解决几何问题。它的主要成就有3项:一是系统总结了代数方程理论,并解决了三次方程不可约的情况;二是采用了一些较先进的代数符号;三是首次用连分数逼近平方根。

邦贝利写作这一著作的目的是要详尽阐述代数方程的理论。在16世纪上半叶,意大利数学家S.费罗(Ferro)、N.塔尔塔利亚(Tartaglia)、G.卡尔达诺(Cardano)和L.费拉里(Ferrari)等人先后对三次和四次方程的求解做出贡献,并得到一般三、四次代数方程的解法。邦贝利感到这些解法缺少系统清晰的论述,因此决定写一部专著,作为方程理论的入门书。他声称人们只要学习了这本书,无需其他任何参考书就可以掌握这门学科。为此他从基本定义和符号人手,全面讨论各种方程的求解。当时的方程要求各项系数均为正数,以符合实际应用的需要,因此方程的类型较多。邦贝利的论述包括5种二次方程、7种三次方程和42种四次方程。对每一种方程他都给出求解法则,并举例加以说明.在他的手稿中许多例子与实际生活结合紧密,但在修订后的印刷本中,邦贝利将例子改成较为抽象的问题。其中有143道题取自古希腊数学家丢番图(Diophantus)的《算术》(Arithmetic),其目的是让人们接受独立的算术和代数训练,学会各种抽象问题的解答。

在《代数学》中邦贝利用大量篇幅讨论卡尔达诺未能解决的三次方程不可约情形,即方程的根是实数,而应用求根公式时却出现平方根下为负数的表达式。他证明了卡尔达诺记载的公式对这种情况依然适用,建立起虚数的运算法则,指出复根的共轭性,还举

出各种例子加以说明，其结果与现在使用的方法基本一致。他还在卷V中指出：古希腊三等分角问题可以转化为解不可约情形的三次方程问题，这是从理论上证明该问题不可能通过尺规作图解决的基础。

采用较先进的代数符号是邦贝利著述的一大特色。他在《代数学》的手稿中用半圆表示未知量的幂，例如 1，2，2 1，48 0 分别表示 $x, x^2, 2x, 48$。在印刷本中半圆变成圆弧，如 1，2，1 2 分别表示 $x, x^2, 2x$，零次幂被省略了。此外他用 p 和 m 分别表示加和减。在手稿中用 R⌊⌋ 表示根号，例如 R⌊4PR6⌋ 表示 $\sqrt{4+\sqrt{6}}$，R³⌊2PR⌊0m121⌋⌋ 表示 $\sqrt[3]{2+\sqrt{0-121}}$。在印刷本中省略了符号⌊⌋，改用 R. q. 和 R. C. 表示平方根和立方根，还用符号⌊ ⌋将根号下的多项式标志出来，相当于括号的作用。例如 R. C. ⌊72. P. R. q. 1088⌋ 表示 $\sqrt[3]{72+\sqrt{1088}}$ 等，有些地方只用前一半符号"⌊"而将后一半"⌋"省略了。

邦贝利在《代数学》卷 I 中首次用连分数逼近平方根的值，得到 $\sqrt{13}=3+\cfrac{4}{6+\cfrac{4}{6+\cdots}}$，$\sqrt{8}=3-\cfrac{1}{6-\cfrac{1}{6-\cdots}}$，$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}$ 等结果。例如在求 $\sqrt{13}$ 时，他应用了平方根近似公式 $\sqrt{a^2+b}\approx a+\frac{b}{2a}$，求出第一个近似值 $3+\frac{4}{6}$，继而取 $3+\cfrac{4}{6+\frac{4}{6}}$ 作为第二个近似值，再取第三个近似值 $3+\cfrac{4}{6+\cfrac{4}{6+\frac{4}{6}}}$，以此类推，可以给出 $\sqrt{13}$ 的任意精确值。但邦贝利没有详述用连分数逼近平方根的理由，也没有说明他是如何发现这一方法的。

邦贝利在几何学上也做了一些探索。例如将算术问题几何

化，幂的线性表示，单位线段的使用，用"互相垂直的坐标"表示一个点等等。他试图从传统的数学处理方法中解脱出来，但论述缺乏严密性。

邦贝利被誉为意大利文艺复兴时期最后一位代数学家。荷兰数学家 S. 斯蒂文（Stevin）称他是"我们时代的伟大算术学家"，并在自己的著作中将邦贝利关于未知量幂的符号稍作修改加以使用。德国数学家 G. W. 莱布尼茨（Leibniz）称他是"分析术的杰出大师"，并在教学时将邦贝利的著作作为学生学习三次方程的基础课本。《代数学》还使丢番图的著作开始在西方普及，邦贝利本人也翻译过其中一部分。邦贝利承认他的著作基于花拉子米(al-khowārizmi)、L. 斐波那契（Fibonacci)、L. 帕乔利(Pacioli）等前人的工作，但其全面性和深刻性都超过前人。《代数学》是文艺复兴时期意大利出版的最有系统的代数著作，对有关知识的传播普及起了一定作用。

文　　献

原始文献

[1] L'algebra di Raffaello Bombello, Biblioteca Comunale del' Archiginnasio in Bologna, Codex B, 1569.

[2] R. Bombelli, L'algebra parte maggiore dell'aritmetica divisa in tre libri, Bologna, 1572.

[3] E. Bortolotti, L'algebra, opera di Rafael Bombelli da Bologna, Libri IV e V, Bologna, 1929

研究文献

[4] S. A. Jayawardene, Unpublished documents relating to Rafael Bombelli in the archives of Bologna, *Isis*, **54**(1963), pp. 391—395.

[5] S. A. Jayawardene, Rafael Bombelli, engineer-architect: Some unpublished documents of the Apostolic Camera, *Isis*, 56(1965), pp. 298—306.

[6] S. A. Jayawardene, Bombelli, Rafael, 见 Dictionary of scientific biography, Vol. 2, 1973, pp. 279—281.

[7] P. L. Rose, The Italian Renaissance of mathematics, Librairie Droz, 1975, pp. 143—150.

[8] B. L. Van der Waerden, A history of algebra, Springer-Verlag, 1985, pp. 59—62.

韦　　达

王　青　建

（辽宁师范大学）

韦达，F（Viète, François）1540 年生于法国普瓦图地区［Poitou，今旺代省的丰特奈-勒孔特（Fontenay-le-Comte）］；1603 年 12 月 13 日卒于巴黎．数学．

韦达的名字应译为“维埃特”，因其著作均用拉丁文发表，故名字常用拉丁文拼法 Vieta，译音是韦达，沿用至今．

韦达的父亲艾蒂安（Étienne）是丰特奈的律师．韦达早年在家乡接受初等教育，后来到普瓦捷（Poitiers）大学学习法律，1560 年获法学学士学位，成了一名律师．1564 年放弃这一职位，做了一段秘书和家庭教师工作．1573 年 10 月受查理九世委派任雷恩（Rennes）布列塔尼（Brittany）地方法院律师．闲暇期间钻研各种数学问题．1580 年 3 月在巴黎成为法国行政法院审查官，后任皇室私人律师．1584 年遭政敌陷害被放逐，5 年后又被亨利三世召回宫中，充任最高法院律师．在法兰西与西班牙的战争期间（1595—1598），韦达为亨利四世破译截获的西班牙密码信件，卓有成效．后来几年辗转于丰特奈和巴黎．1602 年被亨利十四免职，次年去世．

韦达是法国 16 世纪最有影响的数学家．他在毕业以后（1564—1568）和从政在野期间（1584—1589）曾潜心探讨数学，并一直将这一研究作为业余爱好．为了把研究成果及时发表，还自筹资金印刷和发行自己的著作．由于他的论著内容深奥，言辞艰涩，故其理论当时并没有产生很大影响．直到 1646 年，由荷兰数

学家 F. van 斯霍滕（Schooten）在莱顿出版了韦达全部著作的文集，才使他的理论渐渐流传开来，得到后人的承认和赞赏。

平面三角学与球面三角学

《应用于三角形的数学定律》（Canon mathematicus seu ad triangula cum appedicibus，巴黎，1579）是韦达最早的数学专著之一，也是早期系统论述平面和球面三角学的著作之一。该书于 1571 年付印，共有 4 个部分，但最后只有前两部分于 1579 年出版。书中的第一部分列出 6 种三角函数表，第一个表和第六个表以分和度为间隔，给出 6 条三角函数线精确到 5 位和 10 位小数的值，其他的表则列出与三角值有关的乘法表、商表等。第二部分给出造表的方法，解释了三角形中诸三角线量值关系的运算公式，其中有韦达自己发现或补充的公式，如正切定律

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{A+B}{2}\right)},$$

和差化积公式

$$\sin A\pm\sin B=2\sin\left(\frac{A\pm B}{2}\right)\cos\left(\frac{A\mp B}{2}\right)$$

等。他将这些公式汇于一个总表中，使得任意给出某些已知量后，可以从表中得出未知量的值。该书以直角三角形为基础。对斜三角形，韦达仿效古人的方法化为直角三角形来解决。对球面三角形，则使用与平面三角形相仿的记号化为球面直角三角形，给出计算的完整公式及其记忆法则，如提出涉及钝角的余弦定理

$$\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos a.$$

韦达在三角学方面不仅多有创见，而且运用灵活。1593 年亨利四世为解答一个45次方程召见韦达。该方程是由比利时数学家 A. van 罗门（Roomen）提出的，即

$$45y-3795y^3+95634y^5-\cdots+945y^{41}-45y^{43}+y^{45}=C,$$

罗门以此向全世界的数学家提出挑战，征求解答．荷兰驻法大使对亨利四世说，法国人不具备解决这一问题的能力．韦达来到后看出这个方程与单位圆中心角为 $\frac{2\pi}{45}$ 的弧所对的弦有密切关系，于是运用他的三角学知识，几分钟后就用铅笔写出了一个解．第二天他已找到了该方程的全部 23 个正根，而当时并不承认其负根，认为正弦值为负是难以理解的．两年后韦达发表了“回答”(Responsum, 1595) 一文，解释了他的方法．韦达根据 $45 = 3\cdot3\cdot5$，首先将一个角 5 等分，然后再将每一份 3 等分两次，使之分别与五次方程和三次方程相对应，则上述问题可如下求解，先用 $3x - x^3 = C$ 的根 x 求 t：$3t - t^3 = x$；再根据方程 $5y - 5y^3 + y^5 = t$ 得到所求之根．令 $C = 2\sin\phi$，则有 $y = 2\sin\frac{1}{45}\phi$．求解过程中遇到了 $\sin n\theta$ 用 $\sin\theta$ 表示的问题．后来，韦达又专门写了一篇论文“截角术”(Ad angularium sectionum)，初步讨论了正弦、余弦、正切弦的一般公式，首次把代数变换应用到三角学中．他考虑含有倍角的方程，具体给出了将 $\cos nx$ 表示成 $\cos x$ 的函数 ($n \leqslant 11$)，并给出一个确定系数的表．就其应用的方法来看，韦达已能给出当 n 等于任意正整数的倍角表达式了．“截角术”在他生前没有发表，直到 1615 年才由安德森 (Anderson) 印刷所出版．

符号代数与方程理论

《分析方法入门》(In artem analyticem isagoge, 图尔，1591) 是韦达最重要的代数著作，也是最早的符号代数专著，书中第 1 章引用了两种希腊文献：帕波斯 (Pappus) 的《数学文集》(Mathematical collection) 第 7 篇和丢番图 (Diophantus) 的《算术》(Arithmetica)，他将帕波斯提出的几何定理与问题和丢番图著作中的解题步骤结合起来，认为代数是一种由已知结果求条件的逻辑分析技巧，并自信希腊数学家已经应用了这种分析术 (ars

analytice)，他自己只不过将这种分析方法重新组织. 韦达不赞成用 algebra (代数)这个词,因为它是一个外来语,在欧洲语言中没有意义,建议用 analyse (分析)来代替它.

韦达不满足于丢番图对每一问题都用特殊解法的思想，试图创立一般的符号代数. 他引入字母来表示量，用辅音字母 B,C,D 等表示已知量,用元音字母 A(后来用过 N)等表示未知量 x，而用 *A quadratus*, *A cubus* 表示 x^2,x^3,并将这种代数称为"类的运算"(logistice speciosa)，以此区别于用来确定数目的"数的运算"(logistice numerosa). 对这种"类",他在第 2 章中借用了欧几里得 (Euclid)《几何原本》中对量所作的规定，如：整体等于部分之和;相等的两个量分别加上相等的两个量结果仍相等;以及某些运算性质，例如： 若 $a:b = c:d$ 则 $(a + c):(b + d) = a:b = c:d$；若 $ac = b^2$ (或 $ad = bc$) 则 $a:b = b:c$ (或 $a:b = c:d$) 等. 从而使类的运算法则符合于通常数的四则运算法则. 这样，他的"分析方法"对数和几何量在使用上就没有差别了，韦达以此为根据展开了关于代数方程的讨论.

书中第 5 章在列举了方程的构成方法及类型后，给出了解方程的基本步骤. 如将方程一边的某一项移至另一边；用方程中每一项都有的"类"除各项,降低方程的阶；消去最高项的系数,将方程变成比例的形式等. 第 6 章处理了一些涉及综合法的问题，第 7 章讨论了几何量与数之间的关系,若事物本身能表示成长度、面积或体积，则在方程中能用一个数表示这个量. 韦达拘泥于希腊人的齐性 (homogeneity) 原则,即认为一个数表示线段，二数之积表示面积,三数之积表示体积,它们之间是不能混合运算的. 因此在韦达列举的方程中，要求每一项的已知量与未知量的乘积次数相等,称之为均匀性或齐次性 (homogeneous),使整个方程表示同一种几何意义 (例如将三次方程 $y^3 + py + q = 0$ 记为 $x^3 + A^2x = B^3$ 等). 最后一章即第 8 章中韦达讨论了各种可能出现的方程的表示方法,共有 29 条规则. 其中给出了方程的定义：一个方程是一个未知量与一个确定量的比较.

在数学中，代数与算术的区别在于代数引入了未知量，用字母等符号表示未知量的值进行运算．韦达之前，已有不少数学家用字母代替特定的数，但并不常用，韦达是第一个使之系统化的人．虽然他选用的符号并不优良（相等、相乘等概念在运算中仍用文词表示），没有沿用下来，现在用 a,b,c 表示已知量，x,y,z 表示未知量的习惯用法是 R. 笛卡儿（Descartes）继韦达之后提出的，可是当韦达提出类的运算与数的运算的区别时，就已规定了代数与算术的分界．这样，代数就成为研究一般的类和方程的学问，这种革新被认为是数学史上的重要进步，它为代数学的发展开辟了道路，因此韦达被西方称为"代数学之父"．

1593 年，韦达又出版了另一部代数学专著——《分析五篇》（Zeteticorum libri quinque，亦称《发现五篇》，5 卷，约 1591 年完成），用具体实例将类运算与丢番图的《算术》相比较，并试图将后者在几何形式下的代数恒等式重新推导出来，如 $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$ ［记为"a cubus + b in a quadr. 3 + a in b quad. 3 + b cubo æ qualia $\overline{a+b}$ cubo"］等，还包含有二次和三次不定方程的解．其中有 34 个问题引自丢番图的《算术》（包括 13个有同样数值的问题），而解题方法却是韦达的分析术．

《论方程的识别与订正》（De aequationum recognitione et emendatione, 1615）是韦达逝世后由他的朋友 A. 安德森（Anderson）在巴黎出版的，但早在 1591 年业已完成．其中得到一系列有关方程变换的公式，给出了 G. 卡尔达诺（Cardano）三次方程和 L. 费拉里（Ferrari）四次方程解法改进后的求解公式．例如，对方程 $x^3+3B^2x=2z^3$，韦达设 $y^2+yx=B^2$（B^2 可理解为一个矩形的面积，该矩形的小边为 y，大边与小边的差额为 x），则有 $(B^2-y^2)/y=x$，代入原方程，得

$$(B^6-3B^4y^2+3B^2y^4-y^6)/y^3+(3B^4-3B^2y^2)/y=2z^3.$$

将所有项都乘 y^3，并适当合并，得 $y^6+2z^3y^3=B^6$，这个方程有一个二次正根和一个三次根，因此可得所求结果．由 $x^3+3B^2x=2z^3$ 和 $\sqrt{B^6+z^6}-z^3=D^3$ 就得到 $(B^2-D^2)/D$ 为所求的 x．

在处理四次方程时，韦达同样使用其化简原理，首先消去含 x^3 的项，化为方程 $x^4 + a^2x^2 + b^3x = c^4$，然后将含有 x^2 和 x 的项移到方程的右边，并在方程两边同时加上 $x^2y^2 + y^4/4$，则方程变为

$$(x^2 + y^2/2)^2 = x^2(y^2 - a^2) - b^3x + \frac{y^4}{4} + c^4.$$

然后选择适当的 y，使方程右边变成完全平方数，代换 y 值，求出两边的平方根，于是得到关于 x 的两个二次方程，再解之. 他还推出了一般二次方程的求根公式，类似于现在的结果.

在该书第 8 章，韦达给出卡尔达诺三次方程不可约情形的三角解法：若 $x^3 - 3a^2x = a^2b$，其中 $a > b/2$，则利用三角恒等式 $(2\cos\alpha)^3 - 3(2\cos\alpha) = 2\cos 3\alpha$，令 $x = 2a\cos\alpha$，由 $b = 2a\cos 3\alpha$ 确定 3α，可得出方程的三个根

$$2a\cos\alpha,\ 2a\cos\left(\alpha + \frac{2}{3}\pi\right),\ 2a\cos\left(\alpha + \frac{4}{3}\pi\right).$$

韦达只给出一个根，其方法为后人沿用.

《论方程的识别与订正》的另一成就是记载了著名的韦达定理，即方程的根与系数的关系式. 韦达给出 4 个定理，论述了在二次方程中如果第二项的系数是两数和的相反数，第三项的系数是这两数的乘积，那么这两个数就是这个方程的根. 此外，韦达在最后一章中试图将多项式分解成一次因子，如从二次到五次方程中分解出 $x - x_k$，但没有成功，只是在进行过程中较早得到代数方程 $\varphi(x) = 0$ 的形式.

韦达还探讨了代数方程数值解的问题，1591年已有纲要，1600年以《幂的数值解法》(De numerosa potestatum) 为题出版. 其中给出的求方程的近似根与求一般根的方法一致，其过程与 I. 牛顿 (Newton) 近似方法相仿，由估值开始，经过逐次迭代求得结果. 该方法到 1680 年前后才被普遍使用.

几何学的贡献

1593 年韦达在《分析五篇》中曾说明怎样用直尺和圆规作出

导致某些二次方程的几何问题的解. 同年他的《几何补篇》(Supplementum geometriae) 在图尔出版了,其中给出尺规作图问题所涉及的一些代数方程知识,从直线的截距公设开始,用已给两线段的比例中项及圆弧和截距间的关系式,较早地将倍立方和三等分角问题转化为解三次方程的问题,并给出两个用三角方法解三次方程的命题. 后来他又得到用给定线段求解倍立方作图问题的解答(发表于 1646 年).《几何补篇》中还有 6 个命题研究了圆内接正七边形的作图法,指出这种作图亦可导致三次方程,即 $x^3 = ax + a$. 韦达在同年出版的《各种数学解答》(Variorum de rebus mathematicis responsorum) 的前半部分又重述了倍立方体、三等分角及圆内接正七边形问题,并以对偶形式讨论了割圆曲线、平面和球面三角形、阿基米德螺线等问题,给出无穷几何级数的求和公式等结果. 此外,在第 18 章中韦达最早明确给出有关圆周率 π 值的无穷运算式

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots}$$

即 π 的第一个解析表达式. 这是在考虑单位圆内正多边形时发现圆面积为

$$2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots}$$

而得到的. 他还利用圆内接正 393216 边形得到 π 的精确到 10 位小数的近似值,被认为是当时西方最好的圆周率值. 韦达强调 10 进分数(小数)优于欧洲罗马时代流传下来的 60 进分数,而且创造了一套 10 进分数表示法,促进了记数法的改革.

1600 年,韦达又发表一部关于阿波罗尼奥斯 (Apollomus) 几何作图相切问题的专著. 该问题原意是: 任给三个圆形 (可以是点、直线或圆),求作一个圆过给定的点并切于给定的直线或圆. 因为求作一圆与已给的三个圆相切为最难,后人常以此代称为阿波

罗尼奥斯相切问题. 阿波罗尼奥斯的原著已失传，解法也无从知晓。韦达在此试图收集已散失的论文,并亲自解了这道相切题.他通过单独处理该题10种特殊情形的每一种，严格陈述了求解方法,给出应用两个圆相似中心的欧几里得解法,得到同时代数学家的赞赏。他还在附录中列举解法的几何构造及其注释，为后人对这一问题的研究提供了帮助。当韦达解决了比利时数学家罗门提出的45次方程后,作为礼尚往来,他把阿波罗尼奥斯问题回敬给罗门，后来还帮助罗门化简了这一问题的求解方法。韦达用代数方法解决几何问题的思想由笛卡儿继承,发展成为解析几何学。

韦达崇尚古代学者的功绩,认为自己的工作只是用新的方法、技巧或新的形式恢复古人的工作,如使用字母、方程求解等，而对一些概念上的革新持冷漠态度。他在研读卡尔达诺有关三次方程的著作时借鉴了其中的解法,却对卡尔达诺解出的负根置之不理，而且在自己的论著中自始至终不承认负根。另外、韦达对哥白尼的天文学理论抱有成见,在格列高利十三世(Pope Gregory XIII)的历法改革中坚持错误观点，与其他科学家进行了长期争论。但韦达在数学上的巨大成就引导了一大批后继数学家。他在《分析方法入门》的结尾写下这样一句座右铭“没有不能解决的问题”(Nullum non problema solvere)，这不仅对代数学家是一种鼓舞,而且对所有从事数学工作的人来说都是一种极大的鞭策。

文　　献

原始文献

[1] F. van Schooten, Opera mathematica (F. Vieta), Leiden, 1646; Hildesheim (重印),1970.

[2] F. Viète, Introduction to the analytic art, 见 D. J. Struik, A source book in mathematics, 1200—1800, Cambridge, Mass. Harvard Univ. Press, 1969, pp. 74—81.

研究文献

[3] F. Ritter, François Viète, inventeur de l'algèbre moderne, 1540—1603, Essai sur sa vie et son oeuvre, *Revue Occidentale Philosophique, Sociale et Politique* 2nd ser., **10** (1895), pp. 234—274, 354—415.

[4] H. L. L. Busard, Viète, François, 见 Dictionary of scientific biography. Vol. 14. 1980, pp. 18—25.
[5] F Cajori, A history of mathematics, The Macmillam Company 1924 pp. 137—139, 143—144.
[6] M Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, II, Leipzig, 1900; Stuttgart (重印), 1965, pp 582—591. 629—641.
[7] J. Klein, Greek mathematical thought and the origin of algebra, Cambridge, 1968, pp. 150—185, 253—285, 315—353.
[8] J. Grisard, François Viète mathématicien de la fin du seizième siècle, Thèse de 3e cycle École Pratique des hautes études Paris, 1968.
[9] K. Reich & H. Gericke François Viète Einführung in die Neue Algebra Historiae scientiarum elementa, V, Munich, 1973
[10] B. L. Van der Waerden A history of algebra from al-Khwārizmī to Emmy Noether, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1985, pp. 63—68.

斯　蒂　文

邵　明　湖

（辽宁师范大学）

斯蒂文，S.（Simon Stevin）1548年生于荷兰布鲁日（今属比利时）；约1620年3月卒于海牙．数学、工程学．

斯蒂文的父母是布鲁日的商人．他早年曾在安特卫普（Antwerp）的银行做出纳与簿记员，后来在商业部门工作过一段时间．1571年后离开布鲁日，到普鲁士、挪威以及瑞典、波兰旅行，1577年在荷兰北部定居，当时那里已脱离西班牙的统治．1581年他在莱顿，1582年他的第一本书在安特卫普出版．1583年2月16日他在莱顿大学注册．1590年时已在代尔夫特（Delft），1592年受命管理那里的航道．1585年以前他就认识了约翰（John de Groot），因为那一年他将自己的《算术》（L'Arithmétique, 1585）一书献给了约翰．也许正是在代尔夫特时他与约翰一起做了落体实验，证明亚里士多德（Aristotle）的说法是错误的．亚里士多德认为：两个不同重量的物体，在同一时刻从同一高度落下，则重者先到达地面．斯蒂文的实验早于G.伽利略(Galileo)．他离开南荷兰是否由于西班牙占领所引起的迫害我们不得而知，但当时北荷兰正值经济与文化复兴时期，因而斯蒂文很快就当上了工程师，后于1604年由拿骚的毛里斯（Maurice，即奥兰治公爵，时任荷兰联合省的最高行政长官）举荐担任了荷兰军队的陆军军需司令，他担任这一职务直至去世．毛里斯对数学与科学极有兴趣，斯蒂文是他的私人教师与技术顾问，两人私交甚笃，斯蒂文的一些科学著作便是他们友谊的产物．斯蒂文为毛里斯写了许多

种课本，在战争中毛里斯经常将这些手稿带在身边，并督促将其出版。这些著作不只以荷兰语，有些也用法语与拉丁语同时出版。为适应形势需要，斯蒂文在莱顿创办了一所培养工程师的学校，在这所学校中他成功地组织了数学教学。大约 1610 年斯蒂文结婚，1612 年定居海牙，直至去世。他有 4 个子女，次子 H. 斯蒂文也是一位有才能的科学家，在斯蒂文去世后整理出版了他的一些遗稿。1846 年 7 月人们在斯蒂文的家乡布鲁日竖立了一座纪念碑，以纪念他的业绩。

斯蒂文生活的时代正是近代科学的草创时期，这是一个需要巨人并且产生了巨人的时代。从 N. 哥白尼（Copernicus）的天文学革命（1543 年）到 I. 牛顿（Newton）的巨著《自然哲学的数学原理》完成（1687 年），其时科学的成长需要一种与前不同的精神。人们认识到每一代人都必须做出自己的贡献，而古代的智慧只能做为新的研究工作的出发点。当时学术的复兴主要是私人学者的工作，这些人完全掌握了传统科学，并开始创新，进入科学思想的未知领域，因而成为近代科学的先驱。16 世纪的欧洲到处都可以发现这样的先驱者——N. 塔尔塔利亚（Tartaglia）、G. 卡尔达诺（Cardano）等在数学和力学领域中领先；天文学的新纪元是普鲁士的哥白尼和丹麦的 B. 第谷（Tycho）开创的；在法国，数学家 F. 韦达（Viète）为代数学的巨大进步铺平了道路……。然而这些先驱学者的工作必须再加上无数匠师的创造活动才能催生出现代科学，这些匠师由于经济生活的需要试图将科学应用于实际事物，他们不仅对社会生活而且对于科学的进步都发挥了巨大的作用。斯蒂文在文明史上便是由于其理论科学及工程技术两方面的成就获得了他的荣誉地位。现代科学确实需要理论与实践的结合，它只有在实验获得的数据的基础上进行理论探索才有可能发展起来。看来斯蒂文已经意识到了理论与实践的这种结合对自然科学成长的显著作用，他是这一时代的突出代表。

斯蒂文的工作是 16 世纪荷兰与北意大利的工商业繁荣所导

致的科学复兴的一部分，古代科学家如欧几里得（Euclid）、阿基米德（Archimedes）、阿波罗尼奥斯（Apollonius）、丢番图（Diophantus）等人的著作的发现对这一复兴起了极大的刺激促进作用。斯蒂文熟悉上述著作的拉丁文译本，还熟悉阿拉伯数学家花拉子米（al-Khowārizmī）及意大利人卡尔达诺、塔尔塔利亚、邦贝利（Bombelli）的工作。斯蒂文的著作涉及许多方面，包括数学、力学、天文学、地理学、航海、军事科学、工程技术、簿记、建筑、音乐理论、市政事务、逻辑学(辩术)等，其中许多是极富创造性的。即使是对当时科学的一般描述他也一定使所叙述的内容简明易懂、引人入胜。这些著作尽管有许多与他在商业和管理事务方面的兴趣密切相关，但也有相当一部分进入了纯粹科学的领域，以下介绍斯蒂文的主要著作及其成就。

《利息表》（Tafelen van interest, 1582）产生于斯蒂文在商业部门的工作，书中提出了单利和复利的计算规则并给出了快速计算贴现率和年金的表。在斯蒂文之前银行就已在使用这些表，但无疑是保密的，斯蒂文首次使这些表得以印刷出版。1585年出版了该书的法文本，其后这些表在荷兰被广泛使用。

《几何问题集》(Problematum geometricorum, libri V, 1583)出版于安特卫普，处理了一些纯粹数学中的问题，如多边形被直线分割、正多面体与半正多面体的作法以及满足某些条件的立体(如相似于另一立体，并与第三者体积相等的立体)的作法，其中显见欧几里得、阿基米德的传统。书中叙述的椭圆作法可能是斯蒂文自己发明的。

《论十进》（De thiende, 1585）这本小册子是斯蒂文在数学方面的最重要的著作，它系统地处理了十进分数及其应用，阐述的思想虽然很简单，却在西方产生了深远的影响。十进分数的发明不应归功于哪一个人，在西方斯蒂文是第一个系统地论述十进分数及其算术的人。斯蒂文写这本著作的动机是简化计算，他把它献给天文学家、测量人员和商人。斯蒂文的十进数“是一种基于用十进位思想的算术，它利用通常的阿拉伯数码，其中任何数都可以

写下来，通过它们，在商业中遇到的所有计算只用整数而不用分数便可进行。"(《论十进》第一部分，定义 1)他发明了表示单位的符号，3 ① 7 ② 5 ③便表示 0.375. 有了这种表示法，所有小数运算便如整数一样处理. 在斯蒂文之前的西方，十进分数只偶而出现在三角表中，世界各地避免分数的倾向使得人们使用了越来越小的各种度量衡单位，因而计算颇为复杂. 虽然斯蒂文的符号有些笨拙，但它克服了处理小数的困难，其观点是极有说服力的，因而十进分数不久便被普遍地接受了. 在小册子的最后，斯蒂文倡议十进制也应该用于度量衡、币制以及弧度制中. 欧洲一直到法国大革命才开始将十进制用到度量衡中去，《论十进》的法文本于 1585 年出版，在这方面产生了重要影响. 当然，中国在十进位值制记数法、分数的运算、十进分数(小数)的应用诸方面都远远走在世界前面.

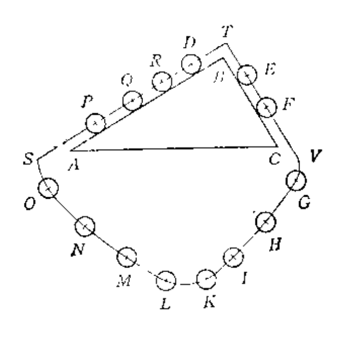
在《算术》(L'Arithmétique, 1585) 中斯蒂文将他那个时代的算术与代数做了综合处理，并为之提供了相应的几何证明. 这一著作的内容在很大程度上是基于卡尔达诺、塔尔塔利亚以及邦贝利的著述. 但斯蒂文认为所有的数包括平方根及负数或无理量，本质上都是相同的，这却是一个新观点. 这一见解不为当时的数学家所接受，却为代数学的发展所证实. 斯蒂文给多项式引入了一个新的符号，并给出了二次、三次与四次方程的简化和统一的解答. 在后来发表的附录中他阐明了如何逼近一任意次方程的实根.

《论透视》(Van de verschaeuwing, 1608) 对于当时艺术家、建筑师和数学家都极感兴趣的透视学做了数学处理. 斯蒂文讨论了透视平面与底平面不垂直时的情形，并解决了已知物体及其投影求观察者位置的问题. 该书的特点之一是大量使用了荷兰语科学名词.

斯蒂文的一些其他著作也与数学应用于实际问题有关. 其中他处理的相当于积分的问题尤为有趣，当时的数学家仍在遵循希腊人的传统使用繁琐的穷竭法进行证明，而斯蒂文却避开了双重

归谬，开始运用一种不如前法严格但更为简便直接的方法，从而为穷竭法向积分的过渡做出了贡献.

《平衡术》(De beghinselen der weeghconst, 1586) 是斯蒂文在力学方面的代表作，主要处理了求物体重心的问题. 该书奠定了斯蒂文做为力学家的基础，他因之被认为是阿基米德到伽利略之间最伟大的力学家，是阿基米德之后复兴、发展其工作的第一位重要人物. 该书包括杠杆理论、斜面定律、重心的确定等，其中最著名的发现是斜面定律. 斯蒂文用球链给出了斜面定律的证明. 在他的球链图的下面，斯蒂文写了一句格言："貌似神奇，并不奇怪". 他非常得意于自己的发现，将其证明图形用作自己的信件的封印、所使用仪器的标志及其著作的扉页的花饰. 他设计的球链图包括两个斜面(如图)，其一是另一个长度的 2 倍. 一球链绕 ABC 角悬挂，忽略任何摩擦，并认为永久运动是不可能的，则球链将处于静止. 下半部分 $GH\cdots MNO$ 是对称的，其重量可以忽略不计. 显然 AB 面上的 4 个球产生的拉力与右面 BC 面上的 2 个球产生的拉力相等. 换句话说，有效合力与斜面的长度成反比. 如果斜面之一是竖直的，则沿斜面的合力与总重力之比就很明显了. 由此得到作用于一点的力的合成与分解法则，从而使对具有一固定点的刚体的平衡的研究成为可能.



斯蒂文对流体静力学的贡献主要载于《流体静力学基础》(De beghinselen des waterwicht, 1586)，这是自阿基米德以来流体静力学方面的第一篇系统的著述，其中斯蒂文对固体排水的阿基米德原理给出了一个更简单自然的解释：在物体 C 浸没之前考虑与 C 体积相等的水，因为后者是静止的，必须受与其自身重量相等

的向上的力，而C本身置于水中时也经受同样的浮力，通过想象部分水是固体化了的，从而解释了阿基米德原理．这篇论文及其附录是通向 B. 帕斯卡（Pascal）对流体静力学系统化的有意义的步骤．

斯蒂文对天文学的研究成果构成了《数学札记》（Wisconstighe ghedachtenissen）的一部分（De hemelloop, 1608）．他先考虑了托勒密关于宇宙结构的理论，然后表明如何通过改变观察者的位置将其转换为哥白尼理论．这是对哥白尼体系的最早的表述之一．当时哥白尼体系并未被普遍接受，那时领头的学者无一表明自己是推崇哥白尼理论的．更为重要的是，斯蒂文不仅解释了哥白尼体系，而且认为这一理论展示了世界的真正结构，他称之为"真实的理论"，表示无条件地支持哥白尼的学说，这早于伽利略许多年．斯蒂文认为行星的运动可以从观察归纳地得到，并且对哥白尼的理论做了改进，摒弃了哥白尼所认为的地球除自转和公转之外的第三种运动．

除了天文学工作，斯蒂文还给出一种潮汐理论，他假定月球有一种引力作用于水上，并假定水覆盖着整个地球表面，以便使问题简化．斯蒂文的另一篇著作《船位测寻术》（De havenvinding, 1599）则探讨了船舶所在经度的确定方法．此前曾经有些作者建议通过测量磁针的偏角来确定之，斯蒂文在这本小册子中清楚地解释了这种方法．他强调必须收集一切实测数据并有必要进行世界范围的测量，这一问题直至19世纪才得到圆满解决．在另一本著作中，斯蒂文提出了一种沿斜驶线驾驶船舶的方法，尽管这种技术超出了当时海员掌握的范围，然而他的解释给出了这一原理的简单公式，这有助于人们对该原理的了解．

由于斯蒂文积极参加了刚成立的荷兰共和国的政治与军事活动，他写了许多关于军事方面的著作．《要塞的设立》（Sterckte nbouwing）出版于1594年，书中论述的城防术在以后的战争中发挥了作用．1617年出版的另一种著作（Castrametatio）则详细地描述了安营扎寨的方法，这些方法在当时的荷兰军队中被广泛

应用。此外，斯蒂文还列出了战役中需要的所有装备，对物资调度的不同方法做了比较研究，在这里他又一次提倡用小数系统。他的著作是那个时代军队生活的生动写照。

在技术方面，斯蒂文的著作涉及风力排水磨坊（Van de Molens，1884）、水闸与钟表（Nieuwe maniere van sterctebou, door spilsluysen，1617）、水力工程等。在荷兰的平原地带磨坊具有重要作用，斯蒂文提出一种新型磨坊的建造方法，根据他的方法建造了许多磨坊，其中斯蒂文将力学原理应用于他的设计并取得很大成效。

斯蒂文对于音调理论也有研究，著有《声乐宝鉴》（Van de spiegeling der singconst，1884）。当时音乐与算术具有传统的纽带联系，通过弦长的各种比例来刻划音程的重要问题在这本著作中得到详细的论述。正当其他数学家和音乐家试图通过音阶的小的调整来解决问题的时候，斯蒂文大胆地摒弃了传统方法，声称一切半调都应相等并且音阶的步幅应分别各自对应于 $2^{n/12}$ 的相继值。

斯蒂文的《公民的生活》（Vita politica, het burgherlick leuen，1590）是一部公民学专著，该书是为适应形势的需要而写的。由于当时局势混乱，每个公民都应该知道自己的职责，对此需要加以引导。斯蒂文在军事与公众事务方面的许多远见卓识为日后的发展所证实。

斯蒂文的《辩论术与证明术》（Dialectike ofte bewysconst，1585）是用荷兰语写的最古老的逻辑方面的论文之一，其表述方法与传统的方法迥异。斯蒂文旨在使逻辑为一般人所掌握，该书在逻辑知识的普及方面发挥了一定的作用。

在文明史上，斯蒂文是工程师和技术专家的典范，他用科学的方式去处理实际问题。他极为注重理论与实践的结合，总是像一个数学家那样思维，这是他科学生涯中一个最显著的特点。

文　献

原始文献

[1] S. Stevin, The principal works of Simon Stevin, ed. by E. J. Dijksterhuis et al., 5 vols., Amsterdam, 1955—1968.

[2] S. Stevin, Tafelen van interest, Antwerp, 1582; Amsterdan, 1590.

[3] S. Stevin, Problematum geometricorum, Libri V, Antwerp, 1583.

[4] S. Stevin, Dialectike ofte bewysconst, Leiden, 1585.

[5] S. Stevin, De thiende, Leiden, 1585. Eng. Tr. in D. E. Smith, Source book of mathematics, New York-London, 1929.

[6] S. Stevin, L'Arithmetique, Leiden, 1585, 1625.

[7] S. Stevin, De beghinselen der weeghconst, Leiden, 1586.

[8] S. Stevin, Vita politica, het burgherlick leven, Leiden, 1590.

[9] S. Stevin, De stercktenbouwing, Leiden, 1594.

[10] S. Stevin, De havenvinding, Leiden, 1599.

[11] S. Stevin, Wisconstighe ghedachtenissen, Leiden, 1608.

[12] S. Stevin, Les oeuvres mathematiques de Simon Stevin, Leiden, 1634.

研究文献

[13] E. J. Dijksterhuis, Simon Stevin, The Hague, 1943.

[14] R. Depau, Simon Stevin, Brussels, 1942.

[15] G. Sarton, Simon Stevin of Bruges (1548—1620), *Isis*, **21**(1934), pp. 241－303.

纳 皮 尔

欧 阳 绛

（山 西 大 学）

纳皮尔，J.（Napier， John） 1550 年生于苏格兰爱丁堡；1617 年 4月4日卒于爱丁堡。数学。

纳皮尔出生于苏格兰的贵族家庭。 13 岁进入圣安德鲁斯的圣萨尔瓦特学院，曾在那里接受神学教育。他的舅父 A. 博瑟韦尔（Bothwell）是奥克尼的主教，支持他到国外留学。 1571 年，纳皮尔回到苏格兰。1572 年，与 J. 斯特林（Stirling）爵士的女儿伊丽莎白（Elizabeth）结婚，并定居在加尔特内斯。1608 年迁居爱丁堡附近的梅尔契斯顿堡。 1579 年，其妻去世，又娶珀思州克罗姆利克斯的 A. 奇斯霍姆（Chisholm）为妻；第一个妻子有两个孩子，第二个妻子有十个孩子。纳皮尔的遗著是第二个儿子罗伯特（Robert）整理出版的。

纳皮尔是一位地主，他曾试验肥料的使用和饲料的配合，并发现在饲料中加盐的好处。他还发明了螺旋抽水机，用于抽去煤坑中的水(1597)。

纳皮尔还预言将来会有许多种杀伤力强的武器，并提出了设计，画了示意图。他预言将来会造出一种枪炮，它能"清除四英里圆周内所有超过一英尺高的活着的动物"；会生产"在水下航行的机器"；并且会创造一种战车，它有"一只血盆大口"，能"毁灭所经之处的任何东西"。

他大部分时间生活在梅尔契斯顿堡的贵族庄园，并且把大部分精力花在那个时代的政治和宗教论争中，但仍为数学的发展做了许多有价值的工作。自 1572 年他第一次结婚后不久，就开始搜

集资料，写了一本关于算术和代数的论著，此书仅以手稿形式保存下来；纳皮尔死后，儿子罗伯特在 H. 布里格斯（Briggs）的帮助下抄写，整理成书。1839 年，由其后裔 M. 纳皮尔发表，书名为《算术技巧》（De arte logistica）。从这部著作中看出，纳皮尔研究过方程的虚根；并把它当作是代数学中的秘密。

纳皮尔于 1590 年左右开始写关于对数的著作，后来发表了两本拉丁文论著：《奇妙的对数定理说明书》（Mirifici logarithmorum canonis descriptio, 1614）和《奇妙对数定律的构造》(Mirifici logarithmorum canonis constructio, 1619)。《奇妙的对数定理说明书》对于对数的性质和用法作了简要叙述，并包括以分弧为间隔的角的正弦的对数表。此书的第一个英文译本的译者是 E. 赖特（Wright），他死后由儿子 S. 赖特（Wright）发表(1616)。《奇妙对数定律的构造》一书，是 R. 纳皮尔（Napier）在其父死后整理出版的，其中包括纳皮尔多年前写的材料；此书对于对数表的计算和赖以建立的根据作了充分解释。

《奇妙的对数定理说明书》引起了人们广泛的兴趣。此书出版之后，伦敦格雷沙姆学院几何学教授布里格斯专程到爱丁堡向这位伟大的对数发明者表示敬意。通过这次访问，纳皮尔和布里格斯商定：如果把对数改变一下，使得 1 的对数为 0，10 的对数为 10 的适当次幂，造出来的表会更有用。于是，就有了今天的常用对数。

对数作为一种计算方法，其优越性在于：通过对数，乘法和除法被归结为简单的加法和减法运算。这种想法起源于纳皮尔时代人们所熟知的公式

$$2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B),$$

在这里，$2\cos A$ 和 $\cos B$ 两个数的乘积被 $\cos(A+B)$ 和 $\cos(A-B)$ 两个数的和取代。此公式易于扩展为：从任何两个数的积变成另外两数的和。

与上述的三角恒等式相联系，有下列三个恒等式：

$$2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B),$$

$$2\cos A\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B),$$
$$2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B).$$

这四个恒等式有时被称做沃纳公式，因为 J. 沃纳（Werner）曾利用它们简化由天文学引起的长计算。此公式在16世纪末被数学家和天文学家们广泛地用于把积变成和与差。此方法以“加与减”（prosthaphaeresis）著称。长除法也可以类似地处理。

纳皮尔通晓“加与减”的方法，并可能受到这种方法的影响；否则就难以说明他为什么最初把对数限制于能用角的正弦表示的那些数。但是，他的消除长乘法和长除法的困难的办法，与“加与减”方法是有显著区别的。

纳皮尔在对数的理论上至少花了20年；最终以几何术语说明该原理如下。考虑线段 AB 和无穷射线 DE，如图1所示。令 C 点和 F 点同时分别从 A 和 D，沿着这两条线以同样的初始速度开始移动。假定 C 点的速度与线段 CB 成正比（比例常数是1），而 F 以匀速移动。纳皮尔定义 DF 为 CB 的对数。也就是说，令 $DF = x$，$CB = y$，则

图1

$$x = \text{Naplog}\ y.$$

纳皮尔为了免去小数的麻烦，取 AB 的长为 10^7。我们现在借助于微积分，可从纳皮尔的定义推出

$$\text{Naplog}\ y = 10^7\log_{1/e}\left(\frac{y}{10^7}\right).$$

推导过程如下：由 $AC = 10^7 - y$，得

$$C\text{的速度} = -dy/dt = y,$$

即 $dy/y = -dt$。积分之，得 $\ln y = -t + C$，将 $t=0$ 代入，计算积分常数，得 $C = \ln 10^7$。所以

$$\ln y = -t + \ln 10^7.$$

由于

$$F\text{的速度} = dx/dt = 10^7,$$

所以

$$x = 10^7 t,$$

$$\text{Naplog } y = x = 10^7 t = 10^7(\ln 10^7 - \ln y)$$
$$= 10^7 \ln(10^7/y) = 10^7 \lg_{1/e}(y/10^7).$$

有人说纳皮尔对数是自然对数，这是没有根据的．实际上，纳皮尔对数随着真数的增加而减少，与在自然对数中的情况相反．

logarithm（对数）这个词的意思是“比数”（ratio number），意指数与数之间总保持相同的比．纳皮尔最初用的是 artificial number（人造数），后来才用 logarithm 这个词．布里格斯引进 mantissa 这个词，它起源于伊特拉斯坎语的一个晚期拉丁名词，原来的意思是“附加”或“补缺”，16 世纪意指加尾数．Chracteristic（首数）这个术语也是布里格斯提出的．

纳皮尔的惊人发明被整个欧洲热心地采用．尤其是天文学界，简直为这个发现沸腾起来了．P. S. 拉普拉斯（Laplace）就认为，对数的发现“以其节省劳力而延长了天文学家的寿命”．

在谁最先发现对数这个问题上，纳皮尔只遇到一个对手，他就是瑞士仪器制造者 J. 比尔吉（Biirgi）．比尔吉独立设想并造出了对数表，于 1620 年出版了《算术和几何级数表》（Arithmetische und geometrische Progress-tabulen, 1620）．虽然两个人都在发表之前很早就有了对数的概念，但纳皮尔的途径是几何的，比尔吉的途径是代数的．

纳皮尔以其对数的发现成为数学史上的重要人物．除此以外，他还有三项重要成果．

（1）解直角球面三角形时帮助记忆的方法，称为圆的部分的规则．

画一个直角球面三角形，依习惯用法标上字母．在该三角形的右边有一个被分成五部分的圆，除 c 外，包括和该三角形同样的字母，且依同样次序排列（图 2）．C, B, A 上一杠，指其“余”（例如，$\bar{B}$ 指 $90° - B$）．角量 $a, b, \bar{C}, \bar{A}, \bar{B}$ 被称作圆部（circular parts）．在

这个圆中,与某一给定部分相邻的有两个圆部,与它不相邻的也有两个圆部。我们称此给定的部分为“中部”,两个相邻的部分为“邻部”,两个不相邻的部分为“对部”。纳皮尔的规则可叙述如下:

① 任何中部的正弦等于两个对部余弦的乘积;

② 任何中部的正弦等于两个邻部正切的乘积.

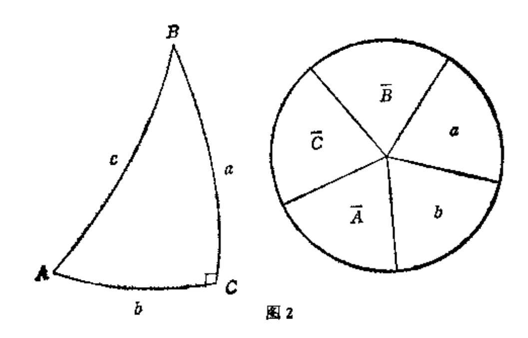


图 2

(2) 得出用于解斜角球面三角形的四个三角公式(称做纳皮尔比拟)中的至少两个. 这四个公式是:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}=\frac{\tan\frac{1}{2}(a-b)}{\tan\frac{1}{2}c},$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}=\frac{\tan\frac{1}{2}(a+b)}{\tan\frac{1}{2}c},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\cot\frac{1}{2}C},$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\cot\frac{1}{2}C}.$$

(3) 发明纳贝尔算筹(Napier's rods). 它是用于机械地进行数的乘法运算、除法运算和求数的平方根的. 纳皮尔在 1617 年发表的《筹算集》(Rabdologiae) 中作了叙述. 例如，在进行乘法运算时，就要准备好10条卡片(当然，也可以用骨板、金属板或木板). 图 3 左方便是这些卡片中的一个，头上标有 6，卡片上是 6 的各种倍数. 为了说明如何使用这些长条作乘法运算，请看《筹算集》中的例子: 1615 乘以 365. 把头上标有 1,6,1,5 的长条一个挨一个地摆成图右边的样子. 容易读出 1615 乘以 365 的 5，6，3 的结果(遇到对角线上有两个数字，就把它们加到一起): 8075，9690 和 4845. 答案如图 3 右上方所示.

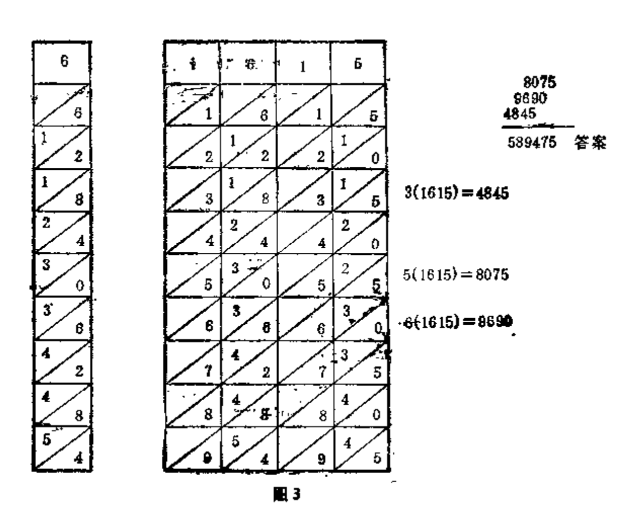


图3

文　献

原始文献

[1] J. Napier, Mirfici logarithmorum canonis description, ejusque usus, Edinburgh, 1614.

[2] J Napier, Rabdologiae, seu numerationis per virgulas libri duo, Edinburgh, 1617.

[3] J. Napier, Mirifici logarithmorum canonis constructio; et eorum ad naturales ipsorum numeros habitudines, Edinburgh, 1619.

[4] M. Napier ed., De arte logistica, Edinburgh, 1839.

[5] C. G. Knott, ed., Napier tercentenary memorial volume, London, 1915.

研究文献

[6] M. Napier, Memoirs of John Napier of Merchiston: His linage, life and times, Edinburgh, 1834.

[7] E. M. Horsburgh, ed., Modern instruments and methods of caculation: A handbook of the Napier tercentenary of exhibition, London, 1914.

[8] E. W. Hobson, John Napier and the invention of logarithms, Cambrdge, 1914.

[9] E. W. Hobson, On early tables of logarithms and early history of logarithms, *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, 48(1920), pp 151—192.

[10] F. Cajori, History of exponential and logarithmic concepts, *American Mathematical Monthly*, 20(1913), pp. 5—14, 35—47, 75—84, 107—117, 148—151, 173—182, 205—210.

[11] D. T. Whiteside, Patterns of mathematical thought in the later seventeenth century, *Archive for History of Exact Sciences*, 1(1961), pp. 124—231.

德　扎　格

赵　林　峰

（辽宁师范大学）

德扎格，G.（Desargues, Girard）1591年2月21日[1]生于法国里昂；1661年10月卒于法国．数学．

德扎格出生在法国里昂的一个教会人员家庭，早期教育可能就是在那里接受的．他后来到了巴黎，曾在1626年向巴黎地方当局建议用机械装置提升塞纳河的水，供应城内．这是我们知道的德扎格的第一次科学活动．

1628年，德扎格作为军事工程师参加了包围拉罗舍尔（La Rochelle）的战斗，在那里结识了笛卡儿，并成为朋友．大约在1630年，住在巴黎的德扎格又同那时法国的几个领头的数学家—— M. 梅森（Mersenne）、P. 加桑迪（Gassendi）、C. 米多尔热（Mydorge）等成为朋友．随后，德扎格经常出席梅森的"巴黎学会"（Academie Parisienne, 这是一个科学史上著名的学术团体，后来逐渐演化为法国科学院)的活动．同时参加的还有E. 帕斯卡（Pascal)、米多尔热、C. 阿尔迪（Hardy)、G. P. 罗贝瓦尔（Roberval）以及P. 卡尔卡维（Carcavi)、B. 帕斯卡(Pascal)．此外，德扎格和著名的数学家P. 费马（Fermat）也有交往．上述这批人的活动和所取得的成就，使法国成为17世纪上半叶世界数学史上最辉煌的国度，也为18，19世纪形成世界的数

1）关于德扎格出生日期，《简明大不列颠辞典》注为1591年3月2日．D. E. 史密斯（Smith）等人的书中则只有出生年份1593年．

学中心打下良好的基础．身处这一旋涡的德扎格以其新颖的思想和独特的数学方法，开辟了数学的一个新领域，成为射影几何学的先驱．

1636年，德扎格出版了他的第一本几何学著作《关于透视绘图的一般方法》(Exemple de l'une des manieres universelles du S. G. D. L. touchant la pratique de la perspective，以下简称《透视法》)．在这本只有12页的小册子中，他主要介绍了自己的透视绘图方法，最后一段写有他对平行和相交直线的新见解．此时，他的射影思想已露端倪，而巴黎的学者们却被另外的两本书所吸引，一本是1636年出版的J. 博格朗(Beaugrand)的《大地静力学》(Gèostatique)，另一本是1637年5月出版的笛卡儿的《方法论》(Discours de la méthode)．德扎格也积极参加了讨论，并由此和博格朗成为论敌．在争论中，他赢得了笛卡儿、梅森、费马、罗贝瓦尔和E. 帕斯卡(Pascal)等人的尊敬．

当人们醉心于笛卡儿处理几何问题的代数方法时，德扎格正顽强地向独辟的蹊径前进．1639年，他最重要的著作《试图处理圆锥与平面相交结果的草稿》(Brouillon projet d'une atteinte aux événements des rencontres du cone avec un plan，以下简称《草稿》)出版了．这本书集中体现了德扎格的新思想、新方法，是射影几何早期发展的代表作．该书在当时只印了大约50本，德扎格把它们分送给朋友和熟人．他原想听取这些人的意见，加以修改后重新出版．这一点可以从笛卡儿于1639年6月19日、博格朗于1639年7月25日给德扎格的信中看到．遗憾的是，由于该书难以阅读，博格朗等人又进行敌意的攻击，称该书结果完全可由阿波罗尼奥斯(Apollonius)的方法得到，以此贬低德扎格的创见，再加上人们对综合法处理几何不重视，这本书只得到笛卡儿、帕斯卡等少数人的支持．随着解析几何和后来的微积分的迅猛发展，该书逐渐被遗忘了．直到1845年，法国几何学家、数学史家M. 沙勒(Chasles)才在巴黎的一个旧书店里发现这本书的手抄本，此时射影几何正处于复兴时期，人们才认识到德扎格这本著作

的价值. 1950 年前后，在巴黎国立图书馆又找到它的原版本，历经 300 余年的沧桑岁月，它终于在诸多数学名著中有了一个适当的位置.

博格朗死后，对德扎格的攻击和批评仍在继续，德扎格也不时地予以反击. 同时，他没有放弃对"普遍的"或统一的方法的追求，又陆续写了几篇文章，介绍他的方法. 在 1640 年或 1641 年，他写了关于圆锥曲线的一篇论文，指出圆的射影性质可一般地推广到各种形式的圆锥曲线，但这篇文章至今没被发现. 另外的文章也都和圆锥曲线有关.

德扎格是一个为了满足实际需要而进行理论研究的数学家，他所写的书，大多跟实际应用有关. 他曾写过一些绘图方面的书，介绍运用透视原理的新方法. 于是那些偏爱旧方法的人们，又向他发动非难. 激烈的争论不仅影响了德扎格的工作，也影响了他的自信心. 他让雕刻家 A. 博斯 (Bosse) 去传播他的数学方法，而自己从 1645 年起就一心从事建筑师的工作，很少再关心数学上的问题. 1648 年，博斯出版了《运用德扎格透视法的一般讲解》(Maniere universelle de Mr Desaugues pour pratiquer la perspective). 其中除了重印德扎格 1636 年的《透视法》之外，还附加了德扎格的三个几何定理，其中之一便是著名的德扎格定理.

大约在 1649—1650 年间，德扎格回到了他的故乡里昂，1657 年又回到巴黎. 这个期间，他仍继续他的建筑师工作，设计建造了一些精美的建筑物. 1660 年，德扎格重新出现于巴黎的学术圈内，荷兰科学家 C. 惠更斯 (Huygens) 曾在 1660 年 11 月 9 日的一次聚会上听过德扎格的讲话. 第二年，德扎格就离开了人世. 关于他去世的确切日期和地点及去世原因都不清楚. 但从 1661 年 10 月 8 日在里昂宣读他的遗嘱一事，人们推断他死于 10 月的头几天.

在数学史上，17 世纪是一个具有重大转折的世纪. 几何方面的突破主要表现在两个不同的方向，一个是利用代数方法来研究几何，这就是笛卡儿的解析几何；另一个则是继续采用综合法，但

去在更一般的情形下研究几何，这便是德扎格等人的工作。

德扎格在数学上的贡献集中体现在他的上述两书以及博斯书后附录中的3个几何定理，特别是他的代表作《草稿》，该书涉及到射影几何的许多基本理论。可以说，德扎格是早期射影几何的奠基者。他的主要贡献如下：

1. 提出无穷远点和无穷远线的概念，从而使平行和相交完全统一

德扎格以前的几何，今天被我们通称为欧氏几何，它在处理直线间的平行和相交关系时是分别对待的。当由于绘画和建筑等实际问题需要而提出透视问题，要研究在透视对应下图形的变化及其性质时，传统的观念就成为束缚了。因为在透视对应下，直线间的平行关系不再保持。例如，一个在地面上的大正方形 $ABCD$，被分割成许多小的正方形(图 1)。当用透视法将其画在纸上时，

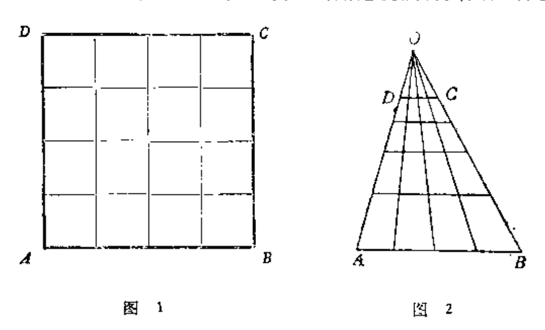


图 1　　　　图 2

平行直线 AB, CD 以及和它们平行的所有直线都相交于一点 O，而直线 AD, BC 以及与之平行的所有直线仍保持平行(见图 2)。当然在另外的情形下，直线 AD, BC 等的平行性也可能消失。关于这一点，德扎格在他 1636 年发表的关于透视法的小册子中就有阐述。他详细讨论了在什么情况下，经过透视后，平行直线变成相交直线；在什么情况下，平行直线仍保持其平行性。这就是说，德

扎格已经认识到,直线的平行关系在透视下是要改变的.

既然平行线束可以变换为相交线束，那么平行线束和相交线束就应视为一致．但这在欧氏几何中是无法解释的．因为按照欧氏几何的观点,相交线束交于同一点,而平行线束却没有交点．冲破原有的观念,解决这一矛盾,或许就是德扎格引入无穷远元素的初衷，这也是欧氏几何与射影几何的重大区别之一．德扎格在他的《草稿》一书中，一开始就引进了无穷远点的概念．与欧几里得有意避开无穷的做法形成对照的是，德扎格首先就允许直线向两个方向无限延长,这无疑是一种认识上的进步．接着,德扎格在平行线束上引入无穷远点,把它看成是这些平行线的交点,由此得出同一平面上任意两条直线都相交的结论．这个结论在射影几何中是至关重要的，是射影几何理论体系赖以建立的基本观点．值得注意的是,著名的德国天文学家、数学家 J. 开普勒（Kepler）在他的《对维泰洛的补充,给出天文学的光学部分》(Ad Vitellionem paralipomena quibus astronomiae pars optica traditur, 1604)一书中也提出了无穷远点的思想．但是开普勒是否对德扎格具有影响,我们还没有证据．此外,德扎格还在他的著作中，在平行平面上引入了公共的无穷远直线，并且得出平行平面组都相交于同一直线的结论．这样,在德扎格的思想中,平行被看作是相交的特殊情形，初步确立了不同于欧氏空间的射影空间的原始概念．这些思想为德扎格研究各种射影性质带来极大的方便，也表现了德扎格非凡的独创精神．

2. 建立点列的对合定义,获得一些重要结果

在《草稿》一书中,德扎格先讨论了直线上的点列,然后进行射影平面上有关内容的讨论,最后是圆锥曲线的射影性质的讨论.在这本书中，关于对合的内容占了较大的篇幅．在德扎格创用的所有术语中,也只有对合（involution）这个词沿用下来．德扎格的对合定义是这样的：直线上三对点 $B,H;D,F;C,G$ 是对合的,如

果 $\frac{BD \cdot BF}{HD \cdot HF}=\frac{BC \cdot BG}{HC \cdot HG}$. 若$D$和$F$重合，$C$和$G$重合，则有 $\frac{BG}{HG}=\frac{BF}{HF}$，或等价地 $\frac{BF \cdot HG}{BG \cdot HF}=1$，这种情形被德扎格称为 B,H,G,F 是四点对合.四点 B,H,G,F 是对合的，也就意味着B和H调和分割线段 FG. 德扎格还发现，当这四个点中的一个，比如说H是无穷远点，就相当于B平分线段 FG 的特殊情形.

活跃于公元1世纪的希腊数学家门纳劳斯（Menelaus）曾提出一个有关球面三角形的定理，该定理的证明要依据平面三角形的相应定理（即门纳劳斯定理）. 门纳劳斯没有证明后一个定理，

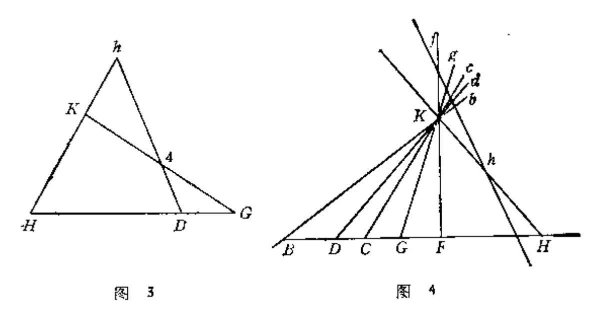


图 3　　　　图 4

而它在德扎格的许多证明中具有重要地位，因此在进行射影平面内某些性质讨论前，德扎格首先证明了这个定理：如果 hKH，$H4D$ 和 $K4G$ 被 HDG 所截，则 $\frac{Dh}{D4}=\frac{Hh \cdot GK}{HK \cdot G4}$（图 3. 这里采用了德扎格的提法及其所用的符号）. 他过K作HG的平行线，然后利用三角形平行截线定理来证明. 门纳劳斯定理的逆也真，就是若 $\frac{Hh}{HK}\cdot\frac{GK}{G4}\cdot\frac{D4}{Dh}=1$，则 H,D,G 三点共线.

在证明了门纳劳斯定理之后，德扎格立即用它证明了一个重要定理：如果 B,H；D,F；C,G 是在不通过K的一直线上的三对对合点，b,h,d,f,c,g 是 BK，HK 等直线和另一直线的交

点，那么 $b,h;d,f;c,g$ 也是3对对合点(见图4)．换句话说，一直线上对合的6个点，经一点射影变换到另一直线上的映象也是对合的．德扎格看到，当K是无穷远点时，定理是显然的，因为那时 BK,HK 等互相平行．他还研究了另外的特殊情形．至于4点对合的类似定理，德扎格也是作为特殊情况看待的，因此德扎格相当于给出了调和点列经射影变换后仍为调和点列的结果．他还利用上一定理，给出了已知直线上的3个点，寻求第4调和点的简单作法．

对合的定义，今天已经是射影几何的一个重要概念了．德扎格关于对合的这些结果，是在前人研究的基础上，采用射影的观点进行一般化处理，因而具有较普遍的意义．

3. 提出圆柱和圆锥的统一思想，并且第一个采用射影的方法，统一研究圆锥曲线问题

圆锥曲线问题是德扎格研究的一个重要课题．古希腊数学家阿波罗尼奥斯的《圆锥曲线论》(Conics) 对圆锥曲线问题作了完整的总结，使后人若无思想上的突破，便几乎没有插足之地．德扎格第一个认识到所有的非退化圆锥曲线(椭圆、抛物线、双曲线)和圆是射影等价的，从而可以利用射影法统一处理圆锥曲线，得出许多重要的新定理．

圆柱截面问题在阿波罗尼奥斯的著作中没有讨论．公元4世纪的埃及数学家塞里纳斯 (Serenus) 在他的著作《圆柱截线》(On the section of a cylider) 和《圆锥截线》(On the section of a cone) 中也只得到“已知一个圆锥(圆柱)，可以找到一个圆柱(圆锥)，使同一平面能截出相等的椭圆”这样的结果．德扎格远远超过前人，他首先将圆柱视为圆锥的特例．由于引进了无穷远点，德扎格就可以同时考察圆锥和圆柱，而且在他看来，圆柱不过是顶点在无穷远点的圆锥，这样就把圆柱和圆锥统一起来了．

按现代的观点，德扎格是把一个圆锥的两个截面看作以圆锥顶点为射影中心的射影对应下的两圆锥曲线，把一个圆柱的两截

面看作仿射对应下的两椭圆，而仿射变换乃是以无穷远点为射影中心的射影变换．而且，德扎格认为抛物线、双曲线和椭圆一样是闭合的，只不过是在无穷远点处闭合．他进一步认为所有的(非退化)圆锥曲线是(射影)等价于圆的，就是说圆所具有的射影性质，对其他各种类型的圆锥曲线全都适用．虽然德扎格的这些思想并非十分明确，但在他的《草稿》一书中都有不同程度的表现．

以德扎格的名字命名的德扎格对合定理的证明体现了德扎格运用射影思想处理问题的独特方法．设 B, C, D, E 是四边形的四个顶点，对边 BC 和 ED 交于 N，BE 和 CD 交于 F，BD 和 CE 交于 R，则这些线与任意一条直线 l 的6个交点是对合的(见图5)．进一步，任何通过 B, C, D, E 的圆锥曲线和四边形的任意两对边与直线 l 的6个交点也是对合的．定理的前半部分是希腊数学家帕波斯（Pappus）的一个结果，德扎格利用门纳劳斯定理证明了这一部分．定理的后半部分完全是德扎格的，而且是体现德扎格射影方法的杰作．证明时，德扎格首先假设通过四边形 $BCDE$ 的圆锥曲线是一个圆，运用圆的割线定理和上半定理证明中的一些结果，证明了在圆的情形下定理成立．然后，假设过 $BCDE$ 的圆锥曲线是任意的，由于这一圆锥曲线可视为一圆锥的截面，将其经圆锥顶点射影变换到另一截面是圆的平面上，因为对合是射影不变的，所以定理仍真．这种利用射影变换思想进行证明的方法，不仅避开了各种复杂情况，简化了证明过程，而且把所有的圆锥曲线的射影性质统一起来．作为这个定理的推论，德扎格还得到 BC 和 DE 平行时的结果．

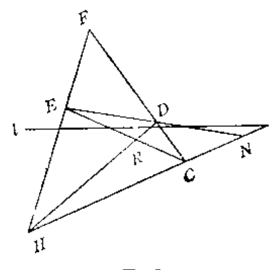


图 5

在德扎格的其他定理中，我们还应提到他关于圆锥曲线的极点和极线的几个定理．极点和极线问题在阿波罗尼奥斯的《圆锥曲线论》中作过讨论．但德扎格的定理更具一般性，并有新的结

果．在证明中，他总是先对圆的情形证明结论成立，然后再通过射影不变性得出最后结论．借助这些定理，德扎格还发现了寻找一点关于圆锥曲线的极线的作法以及圆锥曲线的切线作法，这些方法都比阿波罗尼奥斯的作法简单．

对圆锥曲线的研究，显示了德扎格射影方法的优越，使得一些带有普遍性的问题的证明变得极其简洁．这可能就是德扎格所要追求的统一的或普遍的方法．这种为德扎格首先使用的方法，现已成为射影几何中的基本方法．

4．提出并证明了德扎格定理

在博斯书后附录中的德扎格三个几何定理的第一个便是著名的德扎格定理：如果两个三角形 abl，DEK 对应顶点的连线 aD，bE，lK 共点（H），那么它们的对应边的交点 c，f，g 共线．其逆定理也成立（图 6．需要说明的是，图形基本保持博斯书中的原状，字母也相同，只是定理的叙述为了简明而采用现代方式）．德扎格在共面（二维）和不共面（三维）的情形下分别给出了正定理和逆定理的全部证明．有趣的是，三维情形要比二维情形的证明简单．

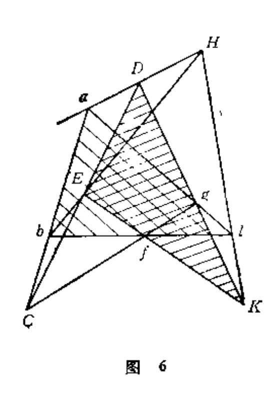


图 6

欧氏几何是一种度量几何，它跟图形的度量性质有关，比如线段的长度、角的大小等．射影几何则是一种非度量几何，它主要研究图形的位置关系，比如相交、共线、共点等．而三角形又是射影几何中的基本图形，因此，德扎格定理在射影几何中就具有重要意义．

德扎格在射影几何学上的贡献可以说是开创性的，他的无穷

远元素的思想及射影的证明方法是是射影几何学的基本内容。

德扎格的著作难以阅读且难以见到，这是他之所以在后来的很长时期默默无闻，他的工作长达150余年无人知晓的原因之一。德扎格在他的著作中采用了一些由植物学借用来的术语，比如不同情形的线或线段，他分别用"树干"（tronc）、"枝条"（rameau）等表示；不同情形的点，他又用"结"（noeud）、"根株"（souche）等表示。这些术语的使用，原意可能是想使文章通俗易懂，而且又和传统的术语相区别。但结果反而增加了阅读的困难，也降低了他的著作的影响力，阻碍了他的方法的传播。

虽然由于各种原因，德扎格在当时和以后的影响远低于他的成就，但也有少数数学家接受了他的思想和方法，继续为射影几何做出贡献。B. 帕斯卡（Pascal）便是最突出的一位。帕斯卡跟随其父 E. 帕斯卡参加了梅森的数学团体，从中受到德扎格的直接影响。在德扎格的鼓励下，帕斯卡投入到射影几何的研究，天才地获得了许多出色的成就。稍后，P. 拉伊尔（La Hire）也开始运用德扎格的射影方法研究圆锥曲线。拉伊尔的父亲是德扎格的学生，拥有德扎格《草稿》一书的印本。拉伊尔将其手抄下来，这一手抄本后来被沙勒发现，才使德扎格的著作重见天日。拉伊尔仔细阅读了德扎格的著作，因而深受影响，他在此基础上为射影几何做了相当多的工作，取得一些较为重要的结果。

在德扎格、帕斯卡等人之后，射影几何早期研究便被汹涌而起的解析几何、微积分的浪潮所吞没，直到19世纪才重新兴起并正式创立这一数学分支。遗憾的是，这时的数学家们还不知道德扎格的工作而不得不重新做起。

作为数学史上的一个重要人物——德扎格，曾被历史所忘记，可是一旦被人们重新认识，他的数学功绩就会永存！

文 献

原始文献

[1] J. V. Field and J. J. Gray, The geometrical work of Girard Desargues, Springer-Verlag, 1987.

研究文献

[2] R. Taton, Desargues, 见 Dictionary of scienttific biography, Vol. 4, 1971, pp. 46—51.

[3] M. Kline, Mathematical thought from ancient to modern times, Oxford Univ. Press, 1972 (中译本:M. 克莱因,古今数学思想,上海科学技术出版社,1979).

[4] J. Fauvel and J. Gray, The history of mathematics, London, 1987.

[5] C. B. Boyer, A history of mathematics, New Jersey, 1988.

[6] D. E. Smith, History of mathematics, Ginn and Company, 1923.

[7] 梁宗巨,数学历史典故,辽宁教育出版社,1991.

[8] Н. Ф. Четверухин, Проективная геометрия, Учпедгиз, 1953(中译本:Н. Ф. 切特维鲁新,射影几何学,高等教育出版社,1955).

[9] V. Sanford, A short history of mathematics, Houghton Mifflin Company, 1930.

卡 瓦 列 里

孙 宏 安

（辽宁师范大学）

卡瓦列里，B.（Cavalieri，Bonaventura） 约1598年生于意大利米兰；1647年11月30日卒于意大利波伦亚。数学。

卡瓦列里的出生年代是他的一个门生和传记作者 U. 达维索（D'Aviso）提供的。卡瓦列里很小的时候，就加入了信奉圣奥古斯都教规的耶稣会宗教团。1615年，他在米兰获得一个小教阶的职务，从此成为一个虔诚的耶稣会士。1616年，他转到比萨的耶稣会修道院任职。在那里，他有幸结识了本笃会修士 B. 卡斯泰利（Castelli），此人曾在帕多瓦师事 G. 伽里略（Galileo），当时是比萨大学的数学讲座主讲人。由于卡斯泰利的引导，卡瓦列里开始研究几何学，并且很快就被欧几里得（Euclid）、阿基米德（Achimedes）、阿波罗尼奥斯（Apollonius）等人的经典著作所吸引。在数学上，他表现出非凡的才能，受到卡斯泰利的重视。1617年，卡斯泰利把卡瓦列里介绍给自己的老师伽里略，此后卡瓦列里一直把自己看作伽里略的学生。1618年，卡瓦列里曾临时性地代替卡斯泰利在比萨大学主讲数学，说明他当时已具备了很高的数学水平。

1620年，卡瓦列里奉命到罗马述职。接着被委派到米兰的圣吉罗拉莫（Girolamo）修道院教授神学，一直到1623年。在此期间，他发展了关于不可分量方法的初步思想，这是他的主要数学成果。同时，他进一步受到教会的倚重。1621年，他被任命为

红衣主教 F. 博罗梅奥（Borromeo）的枢机辅祭人，这位主教非常敬重卡瓦列里，经常与他探讨数学问题，后来还写信给伽里略，盛赞卡瓦列里。

1623 年，卡瓦列里被任命为洛迪的圣彼得修道院的副院长，并成为罗马大主教钱伯利（Ciampoli）的朋友，后来，他的主要著作之一《用新方法促进的连续量的不可分量的几何学》(Geometria indivisibibus continuorum nova quadam ratione promota, 1635. 以下简称《几何学》)就题献给此人。1626 年，他被任命为帕马的耶稣会修道院的院长，他希望能同时担任当地大学的数学主讲人，但未能实现。1626 年秋，卡瓦列里在由帕马去米兰的旅途中患了痛风病，这种病使他备受痛苦并折磨了他一生。他在帕马修道院工作到 1629 年。在这个期间，他始终坚持数学研究工作。1627 年 12月16日，他兴奋地写信给伽里略和博罗梅奥，告诉他们他已经完成了《几何学》一书。1628 年，卡瓦列里得知波伦亚大学的数学教授位置因担任此职的天文学家 G. 马古尼（Magini）去世而出缺，便写信给伽里略，请他帮助自己得到委任。1629 年，伽里略写信给受命为波伦亚大学选择一位新数学教授的 C. 马尔西利 (Marsili)，说卡瓦列里“是阿基米德之后在钻研几何学的深度和广度方面绝无仅有的人才”。同时，卡瓦列里给马尔西利寄去了《几何学》一书的手稿和一篇关于圆锥曲线及其在透镜中的应用的论文。1629 年，卡瓦列里得到波伦亚大学的首席数学教职，并在这个岗位上一直工作到去世。同时，他还被委任为波伦亚女修道院的院长。

1635 年，他的《几何学》一书正式出版，立刻获得了广大的读者，除了阿基米德的著作外，成为研究几何学中无穷小问题的数学家们引用最多的书籍。这是卡瓦列里的主要学术著作之一，它的主要内容就是不可分量方法。全书共分为 7 卷。第 1 卷阐述卡瓦列里关于平面和立体图形的一些假设。第 2 卷引入了不可分量方法，并且证明了一些关于不可分量总体的一般定理，其中包括有深远影响的关于平行四边形中的线段和组成它的三角形内线段关系

的两个定理，它们对应着后来的 $a^2 = 2\int_0^a x dx$ 和 $a^3 = 3\int_0^a x^2 dx$ 型的积分．第 3,4,5 卷中主要是第 2 卷定理的应用——求与圆锥曲线有关的面积和体积．第 6 卷主要探讨与螺线有关的面积，但也涉及到关于柱面、球面、抛物面和球体的一些结果． 第 7 卷中，进一步阐述了不可分量方法的依据，提出并证明了卡瓦列里原理．

1647 年，卡瓦列里出版了他最后一部著作《六道几何练习题》(Exercitationes geometricae sex)． 这也是一部关于不可分量方法的重要著作．在这部书里，他改进了《几何学》中提出的不可分量方法，并用这一方法处理了高于 2 次的代数曲线围成的面积和旋转成的体积问题，证明了相当于

$$a^4 = 4\int_0^a x^3 dx \ \text{和}\ a^5 = 5\int_0^a x^4 dx$$

的求积问题．

在波伦亚期间，卡瓦列里共出版了 11 部著作．

卡瓦列里的主要学术成就是他的不可分量方法．这一方法是微积分发展史上的一个重要环节． 虽然由现代微积分的定义来看，是从有序的角度，而不是从连续性或不变性的角度来规定微积分的，但历史地看，它们又恰恰是由对连续性或不变性的直观认识系统发展的结果．因而，微积分在其发展中始终与几何或运动的观点以及不可分量和无穷小量的解释密切相关，它们都是对连续性或不变性的直观把握的产物．实际上，我们现在定义导数和积分的无穷序列，是在思维中无限地缩小自变量的取值区间而后得到的，这对应着历史上人们对于物理学中导致原子论的种种设想加以数学的引证．可以说，恰如从事物的真实分割(看起来是连续的)得到最小质点即原子一样，不妨认为从连续的数学量(通过思维中的连续分割）就可以得到最小的可能区间即微分．导数定义为两个这种微分的商，而积分则定义为许多（有限的或者无限的）这种微分的和．它们可以说是缘起于利用“无穷小”方法计算

面积和体积的工作。

1. 历史回顾

利用"无穷小"方法求积的思想可以追溯到古希腊的德谟克利特（Democritus），他把自己的原子论思想引入数学，认为一个立体是由无数个平行于底的截面组成的。柏拉图（Plato）进一步阐述了"无穷小量"，欧多克索斯（Eudoxus of Cnidus）和阿基米德实际上还利用"无穷小"方法求出了若干几何图形的面积或体积。不过古希腊人把符合直观作为数学证明的基础之一，他们没有实无穷的观念。欧多克索斯和阿基米德采用的"无穷小"方法是一种不涉及无穷分割的方法。其作法是：为证明一个几何量 S（面积、体积等）等于一个给定的量 C，利用图形的几何性质，以分割法构造出两个序列 $\{L_n\}$ 和 $\{U_n\}$，使得对于所有的 n 都有

$$L_n < S < U_n \text{ 且 } L_n < C < U_n.$$

然后证明，当给定 $\varepsilon > 0$，对足够大的 n，有

$$U_n - L_n < \varepsilon,$$

或证明，当给定 $\alpha > 1$，对足够大的 n，有

$$\frac{U_n}{L_n} < \alpha.$$

无论哪一种情况，最后都用双归谬法证明

$$S = C.$$

此即所谓穷竭法。阿基米德用穷竭法求出了圆的面积，球的体积和表面积，椭圆和抛物弓形的面积，一些旋转体的体积等。

欧洲文艺复兴后，阿基米德的包括上述成果的著作被译成拉丁文，得到广泛的流传。当17世纪的数学家们深入研究了阿基米德的著作，充分领会穷竭法的思想之后，他们深信，阿基米德等古希腊数学家必定还了解另一种更有效的研究方法，用以具体求出前述那个给定的量 C，只用穷竭法是求不出 C 的。当卡瓦列里提出不可分量方法后，有人［如E. 托里切利（Torricelli）］甚至指出，阿基米德采用的似乎正是这种方法。

17 世纪数学家们的分析是相当正确的，阿基米德的确发明并使用了另一种方法，只是写有这一方法的着作散佚，使人们没有见到他关于这一方法的论述。1906 年 J. 海伯格 (Heiberg) 在土耳其的君士坦丁堡(现名伊斯坦布尔)的一家图书馆里发现一古代手稿，其中包括一封被认为公元初就已散佚的阿基米德给埃拉托塞尼 (Eratosthenes) 的信，即著名的《方法》一书。在这本书中阿基米德阐述了他的另一种方法：按德谟克利特的思想，认为图形是由许多微小量组成的，如平面图形是由平行于一条给定直线的许多截线段组成的，立体图形是由许多彼此平行的截面组成的；把含未知量的图形分解为组成它的微小量，然后再用另一组微小量(线段成平面片，其组成的总体的面积和体积为已知或易于求出的)来与它们作比较；比较时应用了力学原理，赋予所有的微小量以理想的重量，于是几何图形就可看作是具有理想重量的重物，再建立一个杠杆，找一个合适的支点，使前后两组微小量取得平衡；然后通过后一组微小量的总体，通过比较求出未知量来。阿基米德把这种方法看作发现的方法(找到定量 C)而不是证明的方法，由此得出的结论仍要用穷竭法加以证明(证明 $S = C$)。可以说阿基米德所求面积、体积都是由这种方法开始的。他的这些"线元"和"面元"是"不可分量"的前身。但他的方法，就事论事，没有建立一般的计算法则，对每一问题都要从头开始。

阿基米德对这一方法抱有很大希望。不过他的方法并没有被同时代人所理解，并且被人们遗忘了许多个世纪。但对于"不可分量"，历史上还时时有人研究。例如 11 世纪萨瓦苏达 (Savasorda) 在其著作中就探讨过不可分量；在中世纪经院哲学家的论争——更多的是哲学论争而非数学论争中，不可分量也是一个经常论及的概念；L. 达·芬奇 (da Vinci) 曾考虑过用无穷小量来求四面体的重心，他设想四面体是由无穷个平面组成的。J. 开普勒 (Kepler) 比较系统地用无穷小方法求面积和体积。在他的《测定酒桶容积的新方法》(Nova stereometria doliorum vinariorum, 1615) 一书中，他求出90多种旋转体的体积。开普勒的方法是把

要求体积的立体划分成无穷多个无穷小的部分,即立体的"不可分量",其大小和形状都便于求解给定的问题。例如,他把球看成是由无穷多个无穷小棱锥组成的,每个无穷小棱锥的顶点都在球心,底面在球的表面上,高等于球的半径,从而得出球的体积是半径与球表面积乘积的三分之一。

2. 卡瓦列里原理

卡瓦列里全面发展了求积的不可分量方法。他的方法依据于这样一个原理:

如果两个平面图形夹在同一对平行线之间,并且为任何平行于这两条平行线的直线所截时截得的线段都相等,那么这两个图形的面积相等;如果每条直线(平行于上述两条平行线的)为两个图形所截得的线段的长度都有相同的比,则两个图形的面积也成相同的比。

类似地,在空间,如果两个立体图形夹在两个平行平面之间,并且为任何平行于这两个平行平面的平面所截时截得的平面片的面积都相等,那么这两个立体图形的体积相等;如果截两个立体所得的两组截面中,每个给定平面所截得的两个不同组的截面的面积都有相同的比例,则这两个立体的体积也成相同的比。

从现代分析学的观点看,这个原理所断定的实际上是:如果被积函数相等,而且积分限也相等,那么这两个积分相等;被积函数中的常数作为一个因子可以提到积分号外面而不改变积分的值。

这一原理在西方是由卡瓦列里提出的,此后在数学中得到相当广泛的应用。西方便称之为卡瓦列里原理。在中国古代,三国时的刘徽和南北朝时的祖冲之父子曾考虑过相同的原理,公元5—6世纪的祖暅明确指出:"缘幂势既同,则积不容异."其中幂指面积,势指关系,积指体积。这句话的意思是"若两立体的截面面积之间的关系处处相等,则两立体的体积之间也必有同样的关系"。显然,这一原理包含卡瓦列里原理的基本内容,我们称之为

"刘祖原理".

卡瓦列里采用多种方法来证明这一原理，这些证明都收入他的《几何学》第 7 卷. 其中的一个证明如下:

设夹在两平行线 PQ, RS 之间的两个任意平面图形 ABC 和 XYZ 如图 1 所示，DN 和 OU 是平行于 PQ, RS 的直线，且它们在两图形上的截线相等. 即在 DN 上，$JK=LM$，在 OU 上，$EF+GH=TV$；进而在任何与 PQ 等距的直线上，在 ABC 和 XYZ 中截得的线段都相等. 下面证明 ABC 和 XYZ 的面积相等.

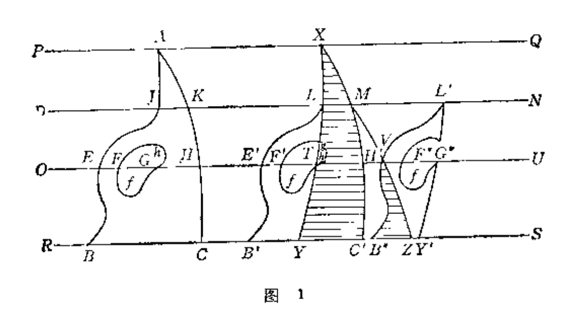


图 1

任取两图形之一，不妨取 ABC，顺平行线 PQ，RS 平移到另一个图形 XYZ 上. 这时，或者 ABC 与 XYZ 重合，因而它们的面积相等，则原理已证；或者它们只有部分重合，如图中的 $XMC'YThL$.

现考察平移后两图形不完全重合的情况. 由于平移保持一直线在两图形上的截线的共线关系，并且它们在平移前是相等的，平移后，它们仍然相等，例如 $E'F'+TH'=TV$. 因而，如果 $E'F'+TH'$ 不完全与 TV 重合，则它们的一部分重合，如 TH' 与 TH' 重合，于是 $E'F'=H'V$，$E'F'$ 是平移后 ABC 的未盖住 XYZ 的部分，$H'V$ 是平移后未被 ABC 覆盖的 XYZ 的部分. 同理可证，对每条平行于 PQ 的直线在两个图形上的截线，其未重合的

部分(如果有的话)都是相等的. 即这一平移有如下性质：若平移的图形有一部分未覆盖在另一图形上，那么后者也一定有一部分未被覆盖;而且，在平移之后,两图形的未重合部分仍满足原理的条件.

现在作第二次平移：平移 ABC 未重合的部分，使得 KL，CY 落在 LN,YS 上,则又有 $VB''Z$ 重合. 如前证可知,二次平移后一个图形的仍未重合部分一定对应着另一图形的仍然未重合的部分;它们仍满足原理的条件,可以再顺 RS,DN 平移，又有新的重合部分和未重合部分,这一过程可以一直进行下去,一直进行到 ABC 与 XYZ 完全重合. 否则,如某一图形有一部分未与另一图形重合,则另一图形也必有未重合的部分剩下. 如果 ABC 与 XYZ 重合,则它们的面积相等. 对立体的情况可仿此证明.

这一证明是巧妙而直观的. 但也有一些弱点：没有证明按所采用的操作方法,两个图形未重合的部分一定是可穷竭的;也没有证明每次平移后图形的未重合部分一定小于原来的图形. 而且，卡瓦列里在答复 P. 古尔丁 (Guldin) 的反对意见时声称，在一个图形中(从而在另一个图形中)"消除"未重合部分的工作可以用无穷步运算完成.

卡瓦列里的另一个证明是用古典的穷竭法作出的. 对满足一定条件的图形 (如两图形都是"广义的平行四边形"或能分解为这种四边形的图形)来说,这一证明是严格的.

3. 不可分量方法

卡瓦列里把平面图形看作是由平行的等距线段组成的，把立体图形看作是由彼此平行的、等距离的平面片组成的. 这些线段就是平面图形的不可分量而这些平面片就是立体图形的不可分量. 卡瓦列里的具体方法是先建立两个给定的几何图形的不可分量之间的一一对应关系，并且设法使对应的不可分量具有某种不变的比例,当其中一个图形的面积或体积已求出时,就可用卡瓦列里原理求出另一个图形的面积或体积.

利用不可分量方法，卡瓦列里解决的典型问题是有关平行四边形中线段和组成它的三角形中的线段关系的一些定理．它们对后来的数学发展产生了深远的影响．一个基本的命题是：设平行四边形 AD（如图 2)被对角线 CF 分成两个三角形 ACF 和 DCF，则平行四边形(面积)是每个三角形(面积)的两倍．卡瓦列里这样证明：先作 $EF = CB$，再作 $HE /\!/ CD$，$BM /\!/ CD$，则 $HE = BM$，则 $\triangle ACF$ 中所有线段与 $\triangle DCF$ 中所有线段对应相等，从而两个三角形相等，因而平行四边形 AD 中所有线段之和等于每个三角形中的和的两倍．用类似的但有更大难度的方法，卡瓦列里进一步证明了平行四边形内线段平方的和等于每个三角形内线段平方和的三倍．利用这一命题，易证圆锥的体积是其外接圆柱体积的三分之一，抛物线弓形是其外接矩形面积的三分之二等．这些都是阿基米德已得出的结果，但卡瓦列里采用统一的方法来处理，不仅使许多利用穷竭法勉强解决的问题，现在可以很方便地求解，如椭圆面积和球体积等，而且使认识深化，得出了更深刻的结果．卡瓦列里沿处理构成平行四边形的线段的幂和组成平行四边形的三角形内相应线段的幂的比，不断前进：他已求出两组线段之和的比为 2:1；线段平方和之比为 3:1；接着又求出两组线段立方和之比为 4:1；4 次幂和之比为 5:1（在此基础上他求出抛物线弓形绕其弦旋转而成的立体的体积)；线段的 5 次幂和之比为 6:1；6 次幂和之比为 7:1 等等；最后，两组线段的 n 次幂和之比为 $(n+1):1$．即得出

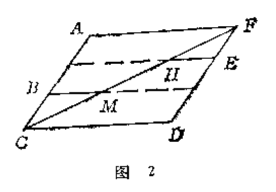


图 2

$$\Sigma x^n = \frac{1}{n+1} \Sigma a^n.$$

按他的平面图形由线段构成的思想，Σa 表示一个以 a 为边长的正方形的面积；类似地，Σa^2 表示一个以 Σa 为截面(以 a 为边长)的正方体的体积，因而有

$$\Sigma x^2 = \frac{1}{3}a^3, \quad \Sigma x = \frac{1}{2}a^2.$$

类比于此，有 $\Sigma x^n = \frac{a^{n+1}}{n+1}$，其中 n 为正整数，在此意义下，与现在用 $\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$ 表示的公式等价．卡瓦列里证明了 $n=3$ 和 $n=4$ 的情况，并验证了 $n=5,6,\cdots,9$ 的情况，$n=1,2$ 的情况已为阿基米德所证明，阿拉伯人已知 $n=4$ 的情况．卡瓦列里的工作是前人工作的推广和统一化．虽然在卡瓦列里之前，P. 费马（Fermat）和 G. 罗贝瓦尔（Roberval）用别的方法也得到了这一结果，但 1639 年他第一个公开发表了这一公式，对 17 世纪无穷小分析的发展起了重要的推动作用．可以说这是在无穷小分析中指出更一般的代数运算法则的可能性的第一个定理．后来由牛顿和莱布尼茨提出而成为积分学的基础．

由此公式出发，卡瓦列里立即证明了在单位区间上，曲线 $y=x^n$（n 为正整数）下的图形面积为

$$A = \sum_0^1 x^n = \frac{1}{n+1},$$

这个图形围绕"弦"旋转而成的立体体积为

$$V = \pi \sum_0^1 x^{2n} = \frac{\pi}{2n+1}.$$

卡瓦列里极大地推进了不可分量方法，不仅把它视为发现的方法，也试图使它成为证明的方法．这样一来，就必须按数学证明的基本要求，使概念严格化，即产生了这样一个问题：不可分量究竟是什么？

卡瓦列里了解这一问题的复杂性，因而想建立一种独立于数学基本要求的方法，使得无论概念是怎样形成的，这种方法都是有效的．他甚至认为，严格性是哲学的事，而不是几何学的事．卡瓦列里没有肯定连续量可以分解为他并没有给出明确定义的不可分的元素，他也没有讲清楚它们究竟是实在的还是潜在的无穷小量．

卡瓦列里从未解释过没有厚薄的不可分量是怎样构成面积和体积的，但在许多场合，他曾把不可分量方法和运动的观点联系起来，认为面积和体积可以看作是由不可分量的运动产生出来的。不过他并没有将这种有启发性的观点发展成为几何方法，这一点为他的后继者 E. 托里切利（Torricelli）所实现，结果产生了 I. 牛顿（Newton）的流数法。卡瓦列里的不可分量在 J. 沃利斯（Wallis）的《无穷算术》（Arithmetica infinitorum, 1655）中有所应用，在牛顿和 G. 莱布尼茨（Leibniz）的数学思想中也有所反映，如前者的"瞬"概念和后者的"微分"概念中就有不可分量的影子。卡瓦列里的思想，对微积分的发展起了巨大的启发作用。

当然卡瓦列里的不可分量方法与微积分尚有较大的距离，主要表现在：(1)没有极限概念；(2)没有采用代数或算术方法，而它们是定义微积分的前提之一；(3)过于强调面积和体积的比而不是直接求积。与阿基米德相比，卡瓦列里在求积方法的统一性上迈出了决定性的一步；与牛顿、莱布尼茨相比，卡瓦列里可以说是他们的直接前驱之一。因而，卡瓦列里的工作是由古希腊人的方法向现代微积分过渡的一个不可缺少的环节。正如莱布尼茨在给 G. 曼弗雷迪（Manfredi）的一封信中所说："几何学中的卓越人物、完成了这一领域中义勇军任务的开拓者和倡导者是卡瓦利里和托里切利，后来别人的进一步发展都得益于他们的工作。"

4. 其他成就

卡瓦列里在《几何学》第 1 卷中给出了一个用几何形式表示的微分中值定理，后来就称为卡瓦列里定理。

卡瓦列里将 J. 纳皮尔（Napier）创建的对数方法引入意大利并在三角学、应用数学中作了有价值的发展。如在《一百个不同的问题》（Centuria dì varii problemi, 1639）一书中讨论了由两数的对数求其和、差的对数的方法，这是后来许多数学家包括 C. 高斯（Gauss）都进行过研究的问题。

卡瓦列里还探讨了古希腊人二次曲线理论的起源及其在透镜

和声学中的应用，进而产生构造反射望远镜的思想，按 G. 皮奥拉（Piola）与 A. 法瓦罗（Favaro）的说法，他的这种思想早于 D. 格雷戈里（Gregory）和牛顿. 卡瓦列里还给出了非平坦球面透镜焦距的计算方法；解释了关于阿基米德以镜子聚焦致燃的传说. 在声学领域中，卡瓦列里尝试进行了 P. 维特鲁维厄斯(Vitruvius）共鸣瓶的考古重建工作，并用在大剧院里以放大声音. 在《几何学》和《六道几何练习题》中卡瓦列里还给出了采用射影线束来画二次曲线的方法，可以认为是 J. 施泰纳（Steiner）工作的先驱。

文 献

原始文献

[1] B. Cavalieri, Directorium generale uranometricum, Bologna, 1632.

[2] B. Cavalieri, Lo specchio vstorio ouero Trattato delle settioni coniche, Bologna, 1632; 第二版, 1650.

[3] B. Cavalieri, Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota, Bologna, 1635; 第二版 1653 (英文节译，见 D. Struik, A Source book in mathematics, Harvard University Press, 1969, pp. 209—213).

[4] B. Cavalieri, Compendio delle regole dei triangoli con le loro dimostrationi, Bologna, 1638.

[5] B. Cavalieri, Centuria di varii problemi, Bologna, 1639.

[6] B. Cavalieri, Nuova pratica astrologica, Bologna, 1639.

[7] B. Cavalieri, Tavola prima logaritmica, Tavola seconda logaritmica, annotationi nell'opera, e correttioni de gli errori piu notabili, Bologna, n.d..

[8] B. Cavalieri, Appendice della nuova pratica astrologica, Bologna, 1640.

[9] B. Cavalieri, Trigonometria plana, et sphaerica, linearis et logarithmica, Bologna, 1643.

[10] B. Cavalieri, Trattato della ruota planetaria perpetua, Bologna, 1646.

[11] B. Cavalieri, Exercitationes geometricae sex, Bologna, 1647 (英文节译，见 D. Struik, A source book in mathematics, Harvard University Press, 1969, pp. 214—218).

研究文献

[12] U. D'Aviso, Vita del P Buonaventura[sic] Cavalieri, in the book Trattato della sfera, Rome, 1682.

[13] G. Piola, Elogio di Bonaventura Cavalieri, Milan, 1844.

[14] A. Favaro, Bonaventura Cavalieri nello studio di Bologna, Bologna. 1885.

[15] C. B. Boyer, The concepts of the calculus, Hafuer Publishing Company, 1949(中译本：C.B. 波耶，微积分概念史，上海人民出版社，1977).

[16] G. Castelnuovo, Le origini del calcolo infinitesimale nell'era moderna, Milan, 1962, pp. 43—53.

[17] G. Cellini, Gli indivisibili nel pensiero matematico e filosofico di Bonaventura Cavalieri. *Periodico di Matematiche*, **44**(1966), 4, pp. 1—21.

[18] C. H. Edwards, The historical development of the calculus, Springer-Verlag, 1979 (中译本：C. H. 爱德华，微积分发展史，北京出版社，1987).

[19] K. Andersen Cavalieri's method of indivisibles, *The Archive for History of Exact Sciences*, **31**(1985), pp. 292—367.

达 朗 贝 尔

易 照 华
(南京大学天文学系)

达朗贝尔,J. L. R.(D'Alembert Jean Le Rond) 1717年11月17日生于法国巴黎;1783年10月29日卒于巴黎。物理学、数学。

达朗贝尔是私生子,母亲德唐娜夫人 (Madame de Tencin) 当过修女,当时是一位著名的沙龙女主人;为了她自己的名誉而将出生不久的婴儿遗弃在巴黎的圣·让勒龙 (Saint Jean le Rond) 教堂的石阶上。后被一宪兵发现,临时用该教堂的名字作为婴儿的教名。姓氏达朗贝尔是他长大后自己取的。他的父亲名为谢瓦里叶 (Chevalier),姓德杜歇-卡农 (Detouches-Canon),是骑兵军官。他得到消息后很快把婴儿找回来,寄养于工匠卢梭 (Rousseau) 夫妇处。达朗贝尔同养父母的感情很好,47岁以前一直住在他们家中。

达朗贝尔少年时被父亲送入一个教会学校(由路易十三时代的教皇马萨林创建),主要学习古典文学、修辞学和数学。他对数学特别有兴趣,为后来成为著名数理科学家打下了基础;虽然在教会学校中受到很多宗教教育,但后来仍不信神,成为反对宗教的著名启蒙学者和"百科全书派"的主要骨干。

达朗贝尔没有受过正规的大学教育, 靠自学掌握了 I. 牛顿 (Newton) 和当代著名数理科学家们的著作。1739年7月,他完成第一篇学术论文,内容是批评 C. 雷诺 (Reyneau) 神父的数学教程。以后两年内又向巴黎科学院提交了5篇学术报告,内容是研究微分方程的积分方法和物体在介质内的阻尼运动。这些报告

由 A. C. 克莱洛（Clairaut）院士回复。经过几次联系后，达朗贝尔于 1741 年 5 月正式进入科学院。当时科学院的职称分四个等级：荣誉院士，只有声望很高的人担任；终身院士，每个学部（当时有 6 个）只有 3 名；副院士，或称通讯院士；助理院士。严格讲来，只有前两种才是正式院士，但有些文献中把这四种统称为院士。达朗贝尔刚进科学院时任天文学助理院士；1746 年提为数学副院士；1754 年提为终身院士。

在 1741 年 1743 年间，达朗贝尔对理论力学的大量课题进行了研究，并在 1743 年底出版了历史性名著《动力学》（Traité de dynamique），1744 年又出版《流体的平衡和运动》（Traité de l'equilibre et du mouvement des fluides）。1747 年发表了两篇重要论文：其中一篇关于喷流反射的文章获普鲁士科学院奖金，文中首先在数学物理中应用偏微分方程；另一篇是关于弦振动的，其中第一次正式采用波动方程。1749 年又发表了有关春分点、岁差和章动的论文，对天体力学发展作出重要贡献。

达朗贝尔的研究工作和论文写作都以快速闻名。他进入科学院后，就以克莱洛作为竞争对手，克莱洛研究的每一个课题，达朗贝尔几乎都要研究，而且尽快发表。多数情况下，达朗贝尔胜过了克莱洛。这种竞争一直到克莱洛去世（1765）为止。

自 1750 年开始，达朗贝尔中断了数理研究工作，加入了"百科全书派"，与启蒙运动成员一起编辑出版宣传启蒙思想的《百科全书》。由 D. 狄得罗（Diderot）主编，达朗贝尔任科学副主编，但工作已超出科学范围。达朗贝尔为《百科全书》写的长篇序言，成为启蒙运动的主要文件。在序言中，全面讨论了科学和道德问题，并用唯物主义观点阐明了科学史和哲学史。虽然达朗贝尔为了应付书刊审查员，口头承认宗教的真理性，但在序言中仍然明确指出，科学的基础是实际的感受；道德的基础是激情、同情和倾向等，而这些都是人们自身能够弄清的。正因为如此，序言出版后经常受到攻击。此外，达朗贝尔还撰写了不少数学和其他知识条目，刊载于《百科全书》。

由于牵涉到的知识面很广，达朗贝尔在这几年内的著作超出了数理方面的研究。1752 年出版的《M. 拉莫（Rameau）原理下的音乐理论和实用基础》,属于心理物理学领域；1753 年出版的《文学和哲学论丛》两卷集，是关于音乐、法律和宗教的小品文集。

1757 年，达朗贝尔访问住在瑞士的文学家 M. A. de 伏尔泰（Voltaire）后，写了一个"日内瓦"条目，刊登在《百科全书》第 7 卷上。他在文中表面赞美，实质上是诅咒这个城市。而《百科全书》正好在瑞士出版，结果被当局吊销了《百科全书》的出版许可证。达朗贝尔这样作违背了《百科全书》的编辑总方针，受到启蒙运动内部人员的攻击，著名哲学家 J. J. 卢梭（Rousseau）攻击得最厉害。达朗贝尔引咎辞去副主编职务。

1760 年以后，达朗贝尔继续从事数理研究，主要专著是 8 卷巨著《数学手册》（Opuscules mathematiques），到 1780 年才出齐。1770 年以后发表的论文不多，1777 年发表的有关流体阻尼的论文，是以合作者 A. 波苏（Bossut）和 J. A. de 孔多塞（Condorcet）为主。

达朗贝尔终生未婚，但长期与沙龙女主人 J. de 勒皮纳斯（Lespinasse）在一起。他的生活与当时哲学家们一样，上午到下午工作，晚上去沙龙活动。达朗贝尔很少旅行，最长的一次是 1764 年应普鲁士国王菲得烈之邀，到柏林王宫住了三个月。虽然国王再三请他移居德国，就任普鲁士科学院院长，达朗贝尔仍婉言谢绝，并推荐 L. 欧拉（Euler）担任。但国王始终未委任欧拉。1762 年，俄皇卡捷琳娜二世曾邀请达朗贝尔任皇太子监护人，被他谢绝。由于他在数理学科中的重要贡献，1772 年被选为巴黎科学院的终身秘书，成为影响最大的院士；欧洲多数国家的科学院聘请他为国外院士。达朗贝尔还是青年科学家的良师益友，著名科学家 J. L. 拉格朗日（Lagrange）和 P. S. 拉普拉斯（Laplace）在青年时代，都得到他的鼓励和支持。他推荐拉格朗日去普鲁士科学院，推荐拉普拉斯去巴黎科学院，以后还一直进行学术讨论。

1765 年，达朗贝尔因病离开养父母的家，住到勒皮纳斯小姐处。在她精心照料下恢复了健康，以后就继续住在那里。任科学院秘书后，他组织编辑和出版巴黎科学院已故院士的文集，但因院内意见分歧而进展缓慢。1776 年，勒皮纳斯小姐去世，达朗贝尔非常悲痛；再加上工作的不顺利，他的晚年是在失望中度过的。达朗贝尔去世后被安葬在巴黎市郊墓地，由于他的反宗教表现，巴黎市政府拒绝为他举行葬礼。

达朗贝尔是多产科学家，他对力学、数学和天文学的大量课题进行了研究；论文和专著很多，还有大量学术通信。仅 1805 年和 1821 年在巴黎出版的达朗贝尔《文集》（Oeuvres）就有 23 卷。

达朗贝尔作为数学家，同 18 世纪其他数学家一样，认为求解物理(主要是力学，包括天体力学)问题是数学的目标。正如他在《百科全书》序言中所说：科学处于从 17 世纪的数学时代到 18 世纪的力学时代的转变，力学应该是数学家的主要兴趣。他对力学的发展作出了重大贡献，也是数学分析中一些重要分支的开拓者。

1. 力学基础研究

(1) *动力学基础的建立*　牛顿力学体系的建立，是 18 世纪的科学家们完成的。达朗贝尔是这批学者的杰出代表之一。他在力学基础上的贡献，集中反映在他的《动力学》中。

《动力学》于 1743 年出版，1758 年再版。全书分为两部分，前面还有很长的哲学序言。该书是他的科学工作中最有名的作品。

在哲学序言里，他首先指出科学革命已经发生，需要很多人长期努力才能完成。他自己的任务是把力学这门新科学系统化和公式化。他主张以感觉论的认识论作为科学的基础，但也保留了 R. 笛卡儿（Descartes）的观点：真理就是明白和简单的。序言中发挥了他对力学的哲学观点，强调基本概念必须符合明白和简单的原则．他认为运动是时间和空间概念的一种组合；他根据物体不能互相穿透的事实，定义物质的不可入性，认为物质由原子组成，原

子是坚硬不可入的，原子间由某种弹簧联结。但这些弹簧是什么？不见得比牛顿用的以太（ether）更高明。限于当时的物理学水平，不可能更深入了解物质的结构。

《动力学》第一部分中，达朗贝尔提出了自己的运动三大定律：第一定律与牛顿的惯性定律相同，但给出一个几何学证明；第二定律为运动的合成，给出一个利用平行四边形法则的数学证明；第三定律为平衡定律，但不是讲作用力与反作用力，而是用动量在撞击前后的守恒来表示，其中撞击时间为离散间隔。动量守恒中隐含质量定义，而不用力来定义质量。

《动力学》第二部分中阐述了著名的**达朗贝尔原理**，并用不同形式的例子来说明。下面以现代语言和符号简述此原理：

作用于一个物体的外力与动力的反作用之和等于零。即

$$\boldsymbol{F} + (-m\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{N} = 0, \tag{1}$$

其中 m，$\boldsymbol{a}$ 为物体质量和加速度，$\boldsymbol{F}$ 为物体受到的直接外力，$\boldsymbol{N}$ 为物体受到的约束反作用力（也是外力）。在没有约束时，相应的 $\boldsymbol{N} = 0$，(1) 式成为

$$\boldsymbol{F} - m\boldsymbol{a} = 0, \tag{2}$$

与牛顿的运动第二定律一致，只是进行了移项。但这是概念上的变化，有下列重要意义：

① 用(2)式表达的是平衡关系，可以把动力学问题转化为静力学问题来处理。

② 在有约束情况下，用(1)式非常有利；它与虚功原理结合后，可列出动力学的普遍方程。

③ 用于刚体的平面运动时，可利用平面静力学方法，使问题简化。

实际上，达朗贝尔原理还为不久后创立的分析力学打下了基础。

(2) 流体力学研究　流体的力学研究从牛顿开始，但作为一门学科——流体力学，则是18世纪的欧拉，D.伯努利（Bernoulli），克莱洛和达朗贝尔打下的基础。

在提出达朗贝尔原理后，他自己就用于研究流体运动的一些主要问题，包括笛卡儿提出的行星系运动的旋涡理论以及克莱洛的有关地球形状理论。

1752 年发表的"流体阻尼的一种新理论"(Essai d'un nouvelle théorie de la resistance des fluides)一文，第一次用流体动力学的微分方程表示场，并提出了著名的**达朗贝尔佯谬**(D'Alembert's paradox)。它实际上是流体力学中的一个定理：物体在大范围的静止或匀速流动的不可压缩、无粘性流体中作等速运动时，它所受到的外力之和为零。这是达朗贝尔从理论上导出的结果，看起来有矛盾，因为物体在流体中运动总会受到阻尼，这是一种耗散力，总和不会为零。达朗贝尔在文中对此未作解释。按现在观点，这个定理并没有错，只是现实中不存在无粘性流体。即使粘性非常小的流体，对其中运动的物体都会起重要的作用，因为粘性使流体在物体表面产生切向应力，即摩擦阻尼。

虽然文中还有一些其他问题，如有些假定破坏了连续性定律，后人仍公认该论文对流体力学基础理论有重大贡献。H. 劳斯(Rouse)和 S. 英斯 (Ince) 曾说："是达朗贝尔第一次引入了流体速度和加速度分量概念。"

达朗贝尔在流体力学上的建树，与当时欧拉、克莱洛、伯努利等齐名。其中欧拉的贡献最大，但其余几人很难排名次，因为他们不断地相互讨论，很难说哪一个想法是谁先提出来的。

(3) 天体力学的奠基者之一　达朗贝尔把力学理论用于研究天体运动，成为天体力学的奠基者之一。其贡献主要集中在两部著作中：一是 1749 年出版的《分点岁差和地球章动的研究》(Recherches sur la précession des equinoxes et sur la nutation de la terre)，在此书中虽然采用了与克莱洛相似的方法，但在运动方程的积分过程中，用了更多的摄动项，使得结果更符合观测；二是《宇宙体系的几个要点研究》(Recherches sur differéns points importants du système du monde)，共分 3 卷，1754 年出版前两卷，1756 年出第 3 卷。其中贡献最大的是下面两个课题：

一是月球运动理论. 在18世纪40年代,欧拉、克莱洛和达朗贝尔几乎同时研究月球运动理论;因为按牛顿理论,已不能解释月球运动的现象,而且理论计算位置和观测之间的差愈来愈大.1747年，达朗贝尔与克莱洛在同一天向巴黎科学院提交了关于月球运动的报告. 他们都解释了月球近地点移动的现象,并在1749年提供了更详细的结果. 1754年,他们两人又几乎同时发表了各自的月球运动数值表,成为最早的月球历表之一. 达朗贝尔的月球运动研究成果,载于《宇宙体系的几个要点研究》第3卷.

二是关于地球形状和自转的理论. 这也是达朗贝尔同克莱洛竞争的课题之一,是牛顿时代就存在的老课题. 达朗贝尔给出了流体自转时平衡形状的一般结果，克莱洛立即用来研究地球的自转，首先在1743年出版了《地球的形状理论》(Theorie de la figure de la Terre). 达朗贝尔对克莱洛关于不均匀流体自转时的形状理论进行推广和补充,研究结果载于《宇宙体系的几个要点研究》第2卷. 他以此为基础，更准确地研究了岁差和章动现象，以及相似的月球天平动,为天体力学的奠基作出贡献.

2. 数学分析的开拓者

自牛顿和G. M. 莱布尼茨(Leibniz)发现微积分后,数学发展到一个新阶段. 英国数学界由于坚持几何方法而进展缓慢;欧洲大陆数学家却继续在分析方法上不断探索而迅速发展，进入数学分析的开拓时期. 达朗贝尔是重要的开拓者之一，其成就仅次于欧拉、拉格朗日、拉普拉斯和D. 伯努利(Bernoulli).

达朗贝尔的数学成果后来全部收入《数学手册》. 下面介绍其主要贡献.

(1) 极限概念　达朗贝尔在《百科全书》的“微分”条目中写道: “微分学是作为最初比和最终比的方法,即求出这些比的极限的一种方法.” 文中还把导数看成极限， 并论证0/0可等于任何量.

在其他一些文章中,他说极限论是微积分学的真正抽象,不是

微分学中无穷小量的一个问题，而是有限量的问题．他给出了极限的较好定义："一个变量趋于一个固定量，趋近程度小于任何给定量，且变量永远达不到固定量"．但他没有把这种表达公式化．

正如 C. 波义尔 (Boyer) 指出： 达朗贝尔没有逃脱传统的几何方法影响，不可能把极限用严格形式阐述；但他是当时几乎唯一把微分看成是函数极限的数学家[2]．

(2) *级数理论* 无穷级数在 18 世纪中，形式讨论占主导地位，一般都作为多项式的推广，只有少数人区别开收敛级数和发散级数．达朗贝尔是其中之一，他在《百科全书》中的"级数"条写道："当级数的项数增加而级数值愈来愈趋向某有限量，则称此级数为收敛级数．"接着他提出了一个判别无穷级数绝对收敛的办法：若级数

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

的相邻两项之比的绝对值 $|u_{n+1}/u_n|$，在 n 大于某固定正整数 N 时，永远小于一个与 n 无关的正数 r，且 $r < 1$，则上述级数为绝对收敛．这就是至今仍在应用的著名的**达朗贝尔判别式**．

对于发散级数，当时一般人照样采用，达朗贝尔在 1768 年出版的《数学手册》第 5 卷中说："所有基于不收敛级数的推理，在我看来都是十分可疑的．"可是他的看法在当时并未引起重视．

18 世纪已出现三角级数，达朗贝尔就是否所有函数都能表示为三角级数的问题，同欧拉和拉格朗日等进行了热烈的讨论，为 19 世纪建立三角级数理论打下基础．

(3) *微分方程* 随着 18 世纪中的力学和天体力学课题的广泛深入研究，常微分方程得到迅速发展．达朗贝尔在这方面的贡献集中在求解上．

解高阶常微分方程的一种基本方法是降阶法，达朗贝尔首先把二阶方程降阶为一般形式的方程

$$\frac{dy}{dx} = a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2, \qquad (3)$$

并且命名为"黎卡提 (Riccati) 方程"(1763)．

在常微分方程奇解的讨论中，达朗贝尔的贡献是加强了欧拉在 1768 年提出的判别法，即在未知通解时，从一个特殊积分鉴别奇解的判别法(1769)。

在达朗贝尔以前，常微分方程的解只用初等函数表示，欧拉和达朗贝尔开始研究用求积形式的函数作为解。 达朗贝尔在 1767 年指出，椭圆积分可以作为常微分方程的解。

达朗贝尔也为偏微分方程的诞生做出了重大贡献。早在1743年出版的《动力学》中，已出现偏微分方程；1746 年发表的《张紧的弦振动时形成的曲线研究》(Recherches des courbes formé par vibration de la corde tendue) 中，首先提出了波动方程

$$\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2}, \tag{4}$$

其中 a 为常数，与弦的密度和张力有关。达朗贝尔证明了它的解为 $at+x$ 的函数与 $at-x$ 的函数之和，并讨论了这两个函数在初始条件下的关系。

1750 年，达朗贝尔引入分离变量的方法，把(4)式的解表示为

$$y(t,x)=g(t)h(x), \tag{5}$$

代入(4)式后，可化为 $g(t)$ 和 $h(x)$ 的两个常微分方程， 并证明在弦振动的初始条件下，$g(t)$，$h(x)$ 分别为 t 和 x 的周期函数。这是现在仍采用的一种解偏微分方程的基本方法。

1763 年，达朗贝尔进一步讨论了不均匀弦的振动，得出广义的波动方程

$$\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial t^2}=A(x)\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2}. \tag{6}$$

在用分离变量求解过程中，出现了常微分方程的边值和特征值问题，但未深入下去。

达朗贝尔坚持偏微分方程的解是自变量的解析函数，这就局限了他取得更多的成果；他首先区别了偏微分方程的特解和通解，但认为通解更重要，没有认识到在解决实际问题(如弦振动)时，满足初始和边界条件的特解才有用。

达朗贝尔在数学上还有很多其他成果：他是早期研究复数性质的人；还是证明代数学基本定理的最早数学家之一，虽然证明不完全；他对概率论也有研究。

由于18世纪的历史特点，达朗贝尔同其他数学家们一样，尽量从力学、天文学、光学和声学的各种课题研究中，开拓出数学分析的各分支。但因未能从严密和系统化方面深入，故在晚年同意拉格朗日的看法，认为数学的思想差不多快穷尽了。实际上，在他们的贡献基础上，19世纪的数学发展得更快。

文　　献

原始文献

[1] A. Bastien (editor), Oeuvres philosophiques, historiques et litteraires de D'Alembert, Vols 1—18, Paris, 1805.

[2] G. Bossange et L. Bélin (editors), Oeuvres complètes de D'Alembert, Vols 1—5, Paris, 1821; Reprints, 1967.

[3] J. L. R. D'Alembert, Opuscules mathématiques, Vols. 1—8, Paris, 1761—1780.

研究文献

[4] J. Morton Briggs, Jean Le Rond D'Alembert, 见 Dictionary of scientific biography, Vol. 1, 1976, pp 110—117.

[5] C. Boyer, The history of calculus and its conceptional development, New York, 1949.

[6] M. Kline, Mathematical thought from ancient to mordern times, Oxford University Press, 1972 (中译本：M. 克莱因，古今数学思想，上海科学技术出版社，1979).

泊　　松

老　　亮
（国防科学技术大学）

泊松，S. -D.（Poisson，Siméon-Denis） 1781 年 6 月 21 日生于法国卢瓦雷省皮蒂维耶；1840 年 4 月 25 日卒于巴黎．数学、力学、物理学．

泊松出生于一个普通人家．由于身体孱弱，他母亲曾把他托给一个保姆照料．他父亲当过兵，后来成了地方低职官吏．老泊松不仅是教儿子读书写字的启蒙老师，而且是选择职业的指路人．最初，泊松到巴黎东南面的市镇枫丹白露学外科．但他缺乏外科手术所需的灵巧，于是放弃医学，1796 年进入枫丹白露中心学校．泊松在数学的学习上大有进步，1798 年以第一名的成绩考入巴黎综合工科学校．J. -L. 拉格朗日（Lagrange）刚开始讲授解析函数课程时，便发现这个外地来的学生发表的见解不错．而 P.-S. 拉普拉斯（Laplace）则对泊松透彻理解困难问题的能力留下深刻的印象．但是泊松对于 G. 蒙日（Monge）为这所新学校安排的重要基础课画法几何，却显得十分笨拙．他在 1799—1800 年关于方程论和贝祖（Bezout）定理的一篇论文中初露锋芒，表现了在数学分析上的才能．泊松于 1800 年毕业，在拉普拉斯的支持下，留校任辅导教师．后来，他成了拉格朗日和拉普拉斯的朋友．1817 年，泊松跟一个家庭移居英国的孤儿 N. de 巴尔迪（Bardi）结婚．

1802 年，泊松在巴黎综合工科学校升任副教授，1806 年接替 J. B. J. 傅里叶（Fourier）成为教授．1808 年成为法国经度局

的天文学家．1809 年巴黎理学院成立，泊松出任该校力学教授．1815 年，他兼任军事学校的主考官．翌年又兼任巴黎综合工科学校毕业生的主考官．1820 年，泊松任大学皇家教育顾问．他于 1803 年加入科学普及协会．1812 年，因 É. L. 马吕斯（Malus）去世出现空缺，泊松被选入法国科学院物理学部．1826 年获彼得堡科学院名誉院士称号．1837 年，泊松被封为男爵．

泊松是一位数学家、力学家和物理学家．他毕生从事数学的研究和教学．他说过，生活的乐趣就在于这两件事．泊松工作的特色是应用数学方法研究各种力学和物理学问题，并由此得到数学上的发现．他发表过 300 多篇论文，所著两卷《力学教程》（Traité de mécanique，1811 年第一版，1833 年增补第二版）在很长的时期内被认为是标准的教科书．

泊松在一般力学上的贡献涉及分析力学和天体力学等几个方面．他第一个用冲量分量形式撰写分析力学．求解哈密顿正则方程所用的一种数学符号，后来被称为泊松括号．现在在其他领域如量子力学中，泊松括号也有应用．在 L. 欧拉（Euler）等人对刚体在重力作用下绕一定点转动的研究之后，泊松独立地获得轴对称重刚体定点转动微分方程的积分，通常称为拉格朗日的可积情况（拉格朗日的工作在泊松之前，但发表在后）．他推广了拉格朗日和拉普拉斯有关行星轨道稳定性问题的研究结果，所建立的泊松方程成为星系动力学的基本方程之一．现代科学家根据对人造地球卫星运行轨道精确测量的结果，利用泊松的公式，便可知道地球的精确形状．此外，泊松还研究了地球转动对弹道曲线的影响等问题．

泊松在固体力学上作过多方面的探讨．在 1829 年发表的"弹性体的平衡和运动的研究报告"（Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques）中，他用一种分子模型，推导了弹性体平衡和运动的普遍方程，并应用于一些具体问题．泊松发现在弹性介质中可以传播纵波和横波．他从理论上得到各向同性

杆件受拉伸时横向与纵向弹性应变之比为一常数,其值等于 0.25. 这就是有名的泊松比. 实验表明, 泊松比的数值随材料而异, 一般与泊松的理论值有出入. 从 1812 年开始,泊松反复研究了平板问题. 他得到圆板弯曲和振动问题的解答. 泊松讨论过杆件的纵向、横向和扭转等振动问题,并首先得出了弹性球体径向自由振动的解答. 最先用三角级数研究梁挠度曲线的大概也是他. 可惜这种非常有用的方法当时未能引起工程界的注意.

在流体力学方面,泊松对纳维埃-斯托克斯方程的建立作出了自己的贡献. 在 1831 年发表的"弹性固体和流体的平衡和运动一般方程的研究报告" (Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques et des fluides) 中, 他第一个完整地给出了说明粘性流体物理性质的本构关系. 此外, 他解决了无旋的空间绕体流动的第一个问题(绕球流动问题);并推动了小振幅波理论的发展.

泊松还将数学应用于物理学, 涉及电、磁、热、声、光等许多方面. 他把引力理论的泊松方程推广应用到电学和磁学的理论, 为静电势理论的建立作出了贡献. 大约从 1815 年起,泊松就开始研究热传导问题. 1835 年出版、两年后又增补再版的《热学的数学理论》 (Théorie mathématique de la chaleur), 就是他在这方面的代表作. 书中讨论了二维稳态热传导等问题. 所导出的理想气体在可逆绝热过程中压强和体积的关系式, 现在一般称为泊松绝热方程. 对于拉普拉斯修正 I. 牛顿 (Newton) 的声速公式, 泊松也做过研究. 此外,在《毛细管作用新理论》(Nouvelle théorie de l'action capillaire, 1831) 一书中, 他探讨了毛细现象问题.

泊松晚年从事概率论研究, 作出了重要贡献. 与他通过力学和物理学问题研究数学的惯常做法不同, 泊松是从法庭审判问题出发研究概率论的. 为了确定一个陪审员在裁定罪行上可能出错的概率,泊松考察了先前的有关著作,并研究了法律条文和刑事法庭的记录. 当时陪审团有 12 个成员,要定罪所需的多数曾有过不同的规定: 1831 年以前是 7:5,从 1831 年开始改为 8:4. 统计数

字表明,在1831年以前，宣判无罪的一直保持在38%至40%之间,每年平均为39%,而以7:5的票数定罪者为7%. 泊松据此指出,即使在1831年之前就可以预料到,执行8:4的新规定以后,定罪的将占54%，宣判无罪的则变为46%. 1831年法庭记录的事实与他的分析相符合. 尽管泊松的分析简单明了,但当时却遭到非议. 泊松在法国科学院宣读论文后，L. 潘索 (Poinsot) 就极力反对这种将演算应用于"伦理学"方面的作法. 泊松在《关于刑事案件和民事案件审判概率的研究》(Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile, 1837) 等著作中,提出了描述随机现象的一种常用的分布,即泊松分布. 这种分布在工业、农业、商业、交通运输、公用事业、医学、军事等许多领域都有应用. 在大量生产中当废品比例预计很小时，泊松分布对于产品检验和质量控制特别有用. 它在管理科学、运筹学和自然科学的某些问题中都占有重要的地位.

泊松在数学上的研究涉及定积分、有限差分理论、偏微分方程、变分法、级数等许多方面. 他是第一个沿着复平面上的路径实行积分的人. 他给出了调和分析中的泊松求和公式. 欧拉-马克劳林求和公式的余项也是由泊松首先加上去的. 由于泊松研究的范围十分广泛而有成效，所以不少数学名词都与他的名字联系在一起. 例如,在数学物理方面,有热传导问题中的泊松积分、波动方程柯西问题解的泊松公式、位势理论中的泊松方程等. 在概率论方面,除泊松分布外,还有泊松变量、泊松过程、泊松试验、泊松大数定律等. 将摄动函数展开成幂级数和三角级数的混合级数,就叫做泊松级数. 有时甚至对完全不同的公式采用了同样的"泊松方程"的名称. 然而，泊松等大数学家未能赏识 E. 伽罗瓦 (Galois) 在群论方面的创始之作,实在是数学史上的一件憾事.

文　献

原始文献

[1] S. -D. Poisson, Traité de mécanique, Paris, 1811; 1833.

[2] S. -D. Poisson, Formules relatives aux effets du tir du canon sur les différentes parties de son affût, Paris. 1826; 1838.

[3] S. -D. Poisson, Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques et des fluides, *Journal de l'École Polytechnique*, 20(1831), pp. 1--174.

[4] S. -D. Poisson, Théorie mathématique de la chaleur, Paris, 1835; 1837.

[5] S. -D. Poisson, Recherches sur la probabilité des jugements, principalement en matière criminelle, Académie des Sciences, Paris, *Comptes rendus hebdomadaires*, 1(1835), pp. 473—494.

[6] S. -D. Poisson, Note sur le calcul des probabilités, Académie des Sciences, Paris, *Comptes Rendus Hebdomadaires*, 2(1836), pp. 395—398.

[7] S. -D. Poisson, Formules relatives aux probabilités qui dépendent de très grands nombers, Académie des Sciences, Paris, *Comptes Rendus Hebdomadaires*, 2(1836), pp. 603—613.

[8] S. -D. Poisson, Note sur la loi des grands nombres, Académie des Sciences, Paris, *Comptes Rendus Hebdomadaires*, 2(1836), pp. 377—382.

[9] S. -D. Poisson, Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile, Paris, 1837.

[10] S. -D. Poisson, Recherches sur le mouvement des projectiles dans l'air en ayant égard à leur figure et leur rotation, et à l'influence du mouvement diurne de la terre, Paris, 1839.

研究文献

[11] P. Costabel, Poisson, Siméon-Denis, 见 Dictionary of scientific biography, Vol. 15, 1975, pp. 480—490.

[12] R. Féron, Poisson, Siméon Denis, 见 International encyclopedia of the social sciences, Vol.11, New York, 1972, pp. 169—172.

庞 斯 列

周 耀 珊
(北京航空航天大学)

庞斯列，J. -V. (Poncelet, Jean-Victor) 1788年7月1日生于法国梅斯；1867年12月22日卒于巴黎。几何学、机械原理、工程力学。

庞斯列小时候寄养在一个小城市圣阿沃尔德的亲戚家中，家境贫苦。他于1804年回到梅斯，由于在语文学校学习成绩优秀，得到一笔助学金，使他能进入大学预科。1807年10月，他考入了巴黎理工科大学，该校有许多法国的著名学者，例如物理学家A. M. 安培(Ampére)，数学家G. 蒙日(Monge)等。1810年9月，他进入梅斯军事工程学院学习，1812年初毕业后分配到荷兰西南部一个小岛的要塞工作。1812年6月参加了拿破仑侵俄战争，是工程兵总参谋部的中尉。战争失败后，在从莫斯科撤退的过程中，他于11月18日在克拉斯诺耶被俘，关押在俄国伏尔加河畔的萨拉托夫战俘营中。他利用取暖的木炭在墙上作图，探索几何学问题。由于手头没有参考资料，他便从最基本的理论开始研究，充分利用了这段时间，为他以后的成功打下基础。直到1814年6月他才被释放。同年9月回到法国，在梅斯工兵部队任上尉，并在兵工厂工作，直到1824年5月。由于他是军事工程师，有足够的业余时间从事在萨拉托夫战俘营开始的射影几何学的研究。1824年5月1日，庞斯列任梅斯炮兵工程兵学院的机械应用力学教授。1830年成为梅斯市议会的议员，而且是莫泽尔总议会的秘书。1834年成为法国科学院院士，并搬到巴黎居住。1851年成为彼得堡通讯院士。

庞斯列到54岁才结婚。1848年2月法国发生了革命。同年4月底他作为莫泽尔省的代表参加了制宪会议，是一名温和的拥护共和者。同时他被提升为准将，并担任了巴黎理工大学校长，一直工作到1850年10月退休。退休后当过伦敦(1851)和巴黎(1855)国际展览工业机械和工具部的主席。由于他对机械化的飞速发展很感兴趣，便化了多年时间收集19世纪以来各种工业机械和工具在工业中应用状况的资料，并在伦敦的展览会上做了报告。几年以后，庞斯列重新整理和编辑了他已发表和未发表的全部著作。可惜的是，其中一些资料和手稿在第一次世界大战中丢失了。

庞斯列的科学技术工作涉及两个非常不相同的领域：射影几何与应用力学。

庞斯列对射影几何的研究主要在1813年到1824年间进行。1813年他在战俘营中，先着手研究纯理论的解析几何，后来才研究圆锥曲线的射影性质。他研究的射影方法与蒙日不同，采用的是中心射影法。在战俘营中的笔记定名为"萨拉托夫备忘录"(Cahiers de Saratov)，收集在1862年出版的《分析和几何应用》(Applications d'analyes et de géométrie)的第1卷中。1820年5月1日，庞斯列将一篇论文"试论圆锥截面的射影性质"(Essai sur les propriétés projectives des sections conigues)送到法国科学院，当时审稿人是法国著名数学家A. L. 柯西(Cauchy)。柯西对庞斯列的几何方法评价不高，并且批评论文中的基本部分即连续性原理是"大胆引人"，"可能导致明显的错误"。当时法国的数学家们对用数学分析解决实际问题更感兴趣，因此对庞斯列的研究没有给予应有的重视。但庞斯列仍然坚持自己的见解，继续深人探索，重新写了一篇内容更为丰富的论文"图形的射影性质"(Traité des propriétés projectives des figures)，于1822年在巴黎发表。这篇论文系统地阐述了柯西批评的连续性原理，指出："如果一个图形从另一个图形经过连续的变化得出，并且后者与前者同样具有一般性，那么可以断定，第一个图形的任何性质第

二个图形也有”．借助于这一原理，庞斯列考察了无穷远点消失或变为虚元素的点和线，引入了如圆上无穷远点、球上无穷远圆等新的概念．由于采用中心射影法，使对圆锥截线性质的研究变成了对圆的性质研究；使一般四边形问题变成了平行四边形问题．他还指出经过中心射影，直线上四点的复比（或一直线束的四直线的复比）保持不变．这篇论文的发表，对 19 世纪射影几何的研究和发展起了决定性作用．

1828 年，庞斯列在德国数学家 A. L. 克雷尔（Crelle）创办的《纯粹与应用数学杂志》（Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik）上发表了他的第一篇关于调和法中心的论文．他的第二篇论文是关于“反极”法则（The method of “reciprocal polars”）的，发表于 1929 年初．文中给出了从极点到极线和从极线到极点的变换的一般表述，促进了对偶原理的建立．对偶原理是射影几何的重要原理．射影平面上的对偶原理可表述为：由于射影平面上的点与直线处于同样的地位，点或直线两者之一都可以看成是平面的基本元素，即平面可以看成由点组成，也可以看成由直线组成．因此射影平面上由这种接合关系所表达的任一个对象、命题，只要把其中的点与直线的概念对调，就得到相应的另一对象、命题．如果把一个已证明了的定理中的点与直线的概念对调，则所得的定理仍然成立．在三维空间的对偶原理中也有类似的情况，只是平面与点对换，而直线不变．例如由 6 个平面、8 个点与 12 条直线组成的六面体，和它对偶的图形是由 6 个点、8 个平面与 12 条直线组成的八面体．只要两个命题中的一个得到证明，则两个互相对偶的命题都是正确的．

庞斯列还开辟了复射影几何研究的领域．他指出：在复射影空间中的两个非退化的二次曲线具有相同的特性，全部二次曲面都有（实的或虚的）生成系统．

由于庞斯列有工科学校的基础训练，又有军事工程师的实践经验，他综合利用数学理论、实验手段和工业实践，取得很多成果．另外，他还致力于力学在工程中的应用．

庞斯列在应用力学和工业技术方面的研究主要在1825到1840年间进行。他注意力学原理对工业机械的应用，努力扩展机械的功能，提高效率。他在1824年写的关于水轮机效率的论文在1825年获得巴黎科学院的力学奖。庞斯列于1824年5月任机械应用力学教授，1826年出版了《机器应用力学教程》（Cours de mécanigue appliqué aux machines），1829年出版了《工程力学导论》（Introduction a la mécanique industrielle）。1837年末，庞斯列在巴黎理学院创建了一门关于实验力学的新学科。他在《工程力学》（Mécanique industrielle）一书中介绍了建筑材料的力学性能方面的知识，在当时也许算得上是最完整的。他不仅给出力学试验的结果，而且详细地讨论了这些结果对工程师的实用意义。庞斯列在吊桥设计中受到启发，对动力学进行了更深入的研究。他认为承受冲击的构件用可锻铸铁比其他铸铁好，因为这种铸铁在拉伸试验时能产生较大的伸长变形，可吸收较大的动能而不断裂。他证明了在一根受载荷的杆上作用一脉冲力，在强迫振动的情况下即使力很小，也会形成很大振幅导致破坏。他解释了为什么一队士兵用整齐的步伐通过桥梁时是危险的。庞斯列指出了应力的重复循环会引起金属疲劳这一重要现象，在拉伸和压缩的交变作用下，再好的弹簧也会发生疲劳破坏。

庞斯列在1826年首次提出"力作功"的概念，把位移与力的投影之积称为"功"，以千克力·米为单位。他在讲援力学课程时把运动学单独分出来讲授，使运动学在后来的发展中成为力学中的一个完整的分支学科。

庞斯列的研究工作还包括结构理论方面。在讨论土墙稳定性时，他提出了一个求墙上最大压应力的图解方法。在处理拱的应力方面，他最先指出只有将拱视为一弹性曲杆时才能得到合理的应力分析。

庞斯列最大的愿望是为理论科学和工程应用两方面的共同发展作出贡献，他用毕生的精力实现了这一目标。

文　献

原始文献

[1] Poncelet J.-V., Traité des propriétes projectives des figures. 2 vols., Paris, 1865—1866.

[2] Poncelet J.-V., Applications d'analyes et de géométrie, 2 vols. Paris, 1862—1864.

[3] Poncelet J.-V., Cours de mécaniqus appliquée aux machines, 3rd. ed. in 2 vols., Paris, 1874—1876.

[4] Poncelet J.-V., Introduction à la mécanique industrielle, Physique ou expérimentale, 2rd. ed., Metz-Paris, 1841.

[5] Poncelet J.-V., Traité des propriétés projectives des figures, Paris, 1822.

[6] Poncelet J.-V., Rapport et mémoire sur la construction et le prix des couvertures en zinc, *Mêmorial de L'officier du Génie*, 13 (1840).

[7] Poncelet J.-V., Résumé historique de la question du défilement des tranchées, *Mémorial de L'officier du Génie*, 14(1844).

研究文献

[8] I. Didion, Mémoires de L'Académie de Metz, 1870, pp. 149—159.

[9] H. Tribout, Un grand savant: Le général Jean-Victor Poncelet, Paris, 1939.

[10] H. Ф. 切特维鲁新著，东北师范大学译，射影几何，高等教育出版社，1955.

[11] 梁宗巨主编，数学家传略辞典，山东教育出版社，1989.

[12] 方德植、陈奕培编，射影几何，高等教育出版社，1983.

格　林

李　文　林
（中国科学院数学研究所）

格林，G.（Green，George）1793年6月或7月生于英国诺丁汉郡；1841年5月31日卒于诺丁汉郡．数学．

1793年7月14日，英国诺丁汉郡圣玛丽教堂的命名登记薄上增加了当地面包师G.格林（Green）与其妻莎拉（Sarah）新生男婴的名字——与父亲同名的乔治．格林的具体生日不详，据命名日估计应在当年6月1日与7月14日之间．格林8岁时曾就读于R.古达克尔（Goodacare）私立学校．据格林的妹夫W.汤姆林（Tomlin）回忆，格林在校表现出非凡的数学才能．可惜这段学习仅延续了一年左右．1802年夏天，格林就辍学回家，帮助父亲做工．19世纪初的诺丁汉郡正处于上升时期．编织业的发达，造成了人口的密集，与拿破仑的战争又促使小麦生意兴隆．1807年，格林的父亲在诺丁汉近郊的史奈登（Sneiton）地方买下一座磨坊，从而包师变成了磨坊主．父子二人惨淡经营，家道小康．但格林始终未忘他对数学的爱好，以惊人的毅力坚持白天工作，晚上自学，把磨坊顶楼当作书斋，攻读从本市布朗利（Bromley）图书馆借来的数学书籍．布朗利图书馆是由诺丁汉郡有影响的知识界与商业界人士赞助创办的，收藏有当时出版的各种重要的学术著作以及全套《皇家学会哲学学报》（*Philosophical Transactions of Royal Society*）．对格林影响最大的是法国数学家P. S. 拉普拉斯（Laplace）、J. L. 拉格朗日（Lagrange）、S. D. 泊松（Poisson）、S.P. 拉克鲁阿（Lacroix）

等人的著作．通过钻研，格林不仅掌握了纯熟的分析方法，而且能创造性地发展、应用，于 1828 年完成了他的第一篇也是最重要的论文——“论数学分析在电磁理论中的应用”（An essay on the application of mathematical analysis to the theorics of electricity and magnetism）．这篇论文是靠他的朋友们集资印发的，订阅人中有一位 E.F. 勃隆黑德（Bromhead）爵士，是林肯郡的贵族，皇家学会会员．勃隆黑德发现了论文作者的数学才能，特地在自己的庄园接见了格林，鼓励他继续研究数学．

与勃隆黑德的结识成为格林一生的转折．勃隆黑德系剑桥大学冈维尔-凯厄斯（Gonville-Caius）学院出身，同时又是剑桥分析学会的创始人之一．他建议格林到剑桥深造．1829 年 1 月，格林的父亲去世，格林获得了一笔遗产和重新选择职业的自由，遂将磨坊变卖，全力以赴为进人剑桥大学作准备．这期间他又完成了三篇论文——“关于与电流相似的流体平衡定律的数学研究及其他类似研究”（Mathematical investigations concerning the laws of the equilibrium of fluids analogous to the electric fluid with other similar research, 1832. 11）、“论变密度椭球体外部与内部引力的计算”（On the determination of the exterior and interior attractions of ellipsoids of variable densities, 1833.5）和“流体介质中摆的振动研究”（Researches on the vibration of pendulums in fluid media, 1833. 12），均由勃隆黑德爵士推荐发表．1833 年 10 月，年已40的格林终于跨进了剑桥大学的大门，成为冈维尔-凯厄斯学院的自费生．经过 4 年艰苦的学习，1837 年获剑桥数学荣誉考试（Mathematical Tripo）一等第四名，翌年获学士学位，1839 年当选为冈维尔-凯厄斯学院院委．正当一条更加宽广的科学道路在格林面前豁然展现之时，这位磨坊工出身的数学家却因积劳成疾，不得不回家乡休养，于 1841 年 5 月31 日在诺丁汉病故．

格林生前长期与磨坊领班 W. 史密斯（Smith）的女儿简（Jane）同居，但始终未正式结婚．最初可能是由于他父亲反对这

门婚事，后来则因剑桥冈维尔-凯厄斯学院院委资格只授予单身汉，格林为了事业只好放弃正式结婚的打算。格林去世后，简被承认为其合法遗孀，人们都称她为“格林夫人”，他们生有两个儿子、五个女儿。

格林短促的一生，共发表过 10 篇数学论文，这些原始著作数量不大，却包含了影响19世纪数学物理发展的宝贵思想。

格林是现代位势理论的先驱与奠基人之一。拉普拉斯在引力计算、泊松在电磁问题中都曾用过这样的函数 V，它同力场分量 (X,Y,Z) 的关系为

$$X=-\frac{\partial V}{\partial x},\ Y=-\frac{\partial V}{\partial y},\ Z=-\frac{\partial V}{\partial z},$$

$$dV=-Xdx-Ydy-Zdz.$$

拉普拉斯同时指出函数 V 满足方程

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0,$$

并采用球调和方法来解此方程。但拉普拉斯和泊松的方法都仅适用于特殊的几何形体，因此有必要发展更一般的理论，这正是格林的工作与前人不同的地方。

格林认识到函数 V 的重要性，并首先引进了“位势函数”这一名称，他在第一篇论文“论数学分析在电磁理论中的应用”中写道：

“这样的函数以如此简单的形式给出电荷基元在任意位置受力的数值。由于它在下文中频繁出现，我们冒昧地称其为属于该系统的位势函数，它显然是所考虑的电荷基元 p 的座标的函数”。

格林接着便发展了位势函数 V 的一般理论，特别是建立了许多对于推动位势论的进一步发展极为关键的定理与概念，其中尤以现用他的名字命名的“格林公式”与“格林函数”最为著名。设有函数 U 与 V，在以曲面 σ 为边界的区域 τ 内充分光滑。格林从体积分

$$\int dxdydz\left\{\left(\frac{dV}{dx}\right)\left(\frac{dU}{dx}\right)+\left(\frac{dV}{dy}\right)\left(\frac{dU}{dy}\right)+\left(\frac{dV}{dz}\right)\left(\frac{dU}{dz}\right)\right\}$$

出发，应用分部积分法推导得

$$\int d\sigma V\frac{dU}{dw}+\int dxdydzV\delta U=\int d\sigma U\frac{dV}{dw}$$
$$+\int dxdydzU\delta V.$$

以上采用的是格林的原始记号，其中 $d\sigma$ 为曲面 σ 的微元，dw 为 σ 的内法线段微元，而

$$\delta V=\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}$$

$\left(\text{即 }\frac{\partial^2V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2V}{\partial z^2}\text{，注意当时尚无偏微分记号}\right)$. 这就是所谓格林公式(或称格林定理). 用现代记号表示则相当于

$$\int_\tau(U\nabla^2V-V\nabla^2U)d\tau=\int_\tau(U\nabla V-V\nabla U)\cdot d\boldsymbol{\sigma}.$$

格林还进一步探讨了 U,V 在 τ 内有奇点的情况，提出格林函数的概念. 这是一种带奇性的特殊位势 U，满足方程 $\delta U=0$，且"仅在曲面内一点 p' 取奇异值，而在无限接近 p' 的邻域内则相当于 $\frac{1}{r}$，r 为与 p' 的距离". 格林同时假设 U 在曲面本身上恒等于零. 用现代记号表示，格林函数 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 满足条件:

$$\nabla_r^2G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=0\ (\text{当 }\boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{r}'),$$

且有

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\underset{r\to r'}{\sim}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|},$$

以及

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=0\quad(\text{当 }\boldsymbol{r}\in\sigma).$$

格林未给出函数 U 的存在与唯一性证明，但却阐述了其物理意义："为了说明确实存在所述函数 U，我们设想曲面是一个接地良导体，在点 p' 上置一单位正电荷，则由 p' 及其在曲面上引发的电荷

所产生的总位势将等于所要求的U的值”，而“U满足前述论证中所赋予的一切性质”。

格林公式与格林函数已成为现代分析的基本工具，格林函数更被日益广泛地应用于现代物理的许多领域，如量子碰撞、基本粒子理论与固体物理等。

格林对于波动的数学理论有浓厚的兴趣并发表了多篇论文，其中最重要的是关于光波的研究。光的波动的数学描述，在19世纪数学家中一直是一个时髦的课题。在格林时代，科学界所持的一种普遍意见是把光看作弹性固体以太的振动，例如A. L. 柯西（Cauchy）在光以太研究中采用了吸引与排斥形式相互作用的机械模型。格林对柯西和其他学者对以太中力的性质作特殊假设的做法持批判态度，他在论文“论光在两非晶介质公共面上的反射与折射定律”（On the laws of reflexion and refraction of light at the common surface of two noncrystallized media, 1837）中深刻地指出：

“我们对于发光以太元之间相互作用的方式知道得如此少，因而最可靠的办法还是以某种一般的物理原理作为推理的基础，而不要去作特殊的假设。”

格林接着叙述他所说的“一般原理”如下：

“任一物质系统的元素间不论以何种方式相互作用，若以所有的内力分别乘以相应的方向元，则对该物质系统的任一指定部分，此乘积的和永远等于某函数的恰当微分。”

这实质上相当于能量守恒原理。格林是第一个将这种一般形式的守恒原理引入弹性力学的学者。他由此出发导出了描述光媒质振动规律的偏微分方程。在格林写成他的光学论文时，M. 法拉第（Faraday）的电磁感应刚发现不久，格林关于光波的数学研究还不具备突破机械以太观的条件，但他选择一般数学原理作为推导光媒质运动方程的基础而避免对以太的力学性质作人为的假设，说明他在这方面比同时期的其他数学物理学家要高出一筹。格林的光波研究对弹性力学的发展亦有重要意义。现代弹性理论中

的一种应变张量就被称为"格林张量"。

格林关于水波的研究也引起人们的注意。1837年，英国工程师 S. 罗素（Russell）首先观察到一种叫"孤立波"（solitary wave）的现象。罗素于1844年第二次在不列颠科学协进会上作浅水波问题报告时，曾埋怨数学家们未能预报与描述他所观察到的现象。然而在此之前，格林已发表了两篇这方面的论文，其中第一篇"论具有较小深度与宽度的可变渠道中波的运动"（On the motion of waves in a variable canal of small depth and width, 1837）几乎是与罗素的第一份报告同时发表，格林在其中导出浅水波方程为：

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\left\{\frac{\partial\beta}{\beta\partial x}+\frac{\partial\gamma}{\gamma\partial x}\right\}\frac{\partial\phi}{\partial x}-\frac{1}{2\gamma}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=0。$$

其中 ϕ 为水平面对平衡位置的位移，2β，2γ 分别表示矩形截面渠道的宽与深，它们是 x 的函数。为了解上述方程，格林作变换：$\phi=Af(t+X)$（A 和 X 均为 x 的函数）。将 A，β，γ 写成 ωx 的函数，设含 ω^2 的项可忽略不计，则变换后原方程化为两个方程：一个是关于函数 A 的方程，另一个是关于函数 X 的方程。分别解出这两个方程，得到浅水波方程的解为：

$$\phi=\beta^{-\frac{1}{2}}\gamma^{-\frac{1}{4}}\left\{f\left(t+\int\frac{dx}{(g\gamma)^{\frac{1}{2}}}\right)+F\left(t-\int\frac{dx}{(g\gamma)^{\frac{1}{2}}}\right)\right\}$$

其中 f 与 F 是任意函数。经过比较不难看出，格林的上述方法与现代孤立波理论中普遍使用的所谓 WKB 方法是一致的。

格林在他的第二篇浅水波论文"关于渠道中波的运动的注记"（Note on the motion of waves in canals, 1839）中，利用前述理论讨论深度为 c 的渠道波的速度，获得了与实验数据相符合的近似公式。

目前所知的第一个非线性孤立波方程是由 D. J. 科特维克（Kotteweg）与 G. 德 弗里斯（De Vries）在1895年给出的。但如果调查一下19世纪水波方面的文献，可以清楚地看出一条线索，说明科特维克与德弗里斯的理论是前人一系列研究的结晶，而格

林的工作则处于这条线索的开端．格林无疑是历史上最早试图从数学上描述孤立波现象的数学家．

格林的著作中还包含许多其他的贡献，它们的意义与影响还有待进一步探讨．n 维空间的概念是 H 格拉斯曼（Grassmann）于 1844 年首先提出的．但在格林著作中已出现高维几何的思想．格林 1833 年完成的论文“论变密度椭球体外部与内部引力的计算”，率先发展了 n 元函数分析，其中使用 s 个坐标 $\{x_1, x_2, \cdots, x_s\}$ 来代替通常的三维欧氏坐标，并使用 s 维球体与椭球体作为相应的三维图形的推广．

现代分析中扮演重要角色的所谓狄利克雷（Dirichlet）原理，溯其源亦为格林首创．在上述同一篇论文中，格林假设积分（用格林的原始记号）

$$\int dx_1 dx_2 \cdots dx_s \cdot \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{dV}{dx_i}\right)^2$$

存在一个极小化函数 V_0，并指出 V_0 满足方程

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{d^2V}{dx_i^2} = 0,$$

这正是 s 维情形的狄利克雷原理．W. 汤姆生（Thomson，即后来的凯尔文勋爵）在 1847 年也阐述了同样的原理，而他对格林的工作是十分熟悉的．

格林的工作孕育了以汤姆生、G. G. 史托克斯（Stokes）和 J.C. 麦克斯韦（Maxwell）等人为代表的剑桥数学物理学派．现代数学物理仍然可以从格林著作中汲取营养．然而这位靠自学成才的数学家生前却默默无闻．他的第一篇论文因未正式发表几乎濒于失传．汤姆生在剑桥当学生时，从一篇论文的文献索引中了解到格林这篇文章的题目，四处寻觅原作而不得．1845 年，汤姆生从剑桥毕业，在行将离校的前夕将此事告诉了一位叫霍普金斯（Hopkins）的私人数学教师．出乎他的意料，霍普金斯细心收藏着格林这篇著作的传本．汤姆生带着这篇著作踏上了赴法国考察

的旅途，并在巴黎向 J. 刘维勒 (Liouville) 和 C. F. 斯图姆 (Sturm) 介绍了格林的论文，二者阅后立即意识到该文的价值，认为格林已为位势论及其应用奠定了完整的基础。后来，在德国数学家 A.L. 克勒尔(Crelle)资助下，格林这篇论文终于在他去世十年后在克勒尔主编的《纯粹与应用数学杂志》(Jour. für Rei. und Ang. Math.) 上正式发表 (1850)，汤姆生并为此撰写了介绍格林生平与工作的导言.1871 年，剑桥冈维尔-凯厄斯学院院委 N M. 费勒(Ferrers)编辑的《格林数学文集》(Mathematical papers of the late George Green)在伦敦出版，格林的工作受到了越来越多的重视。今天，格林渡过他艰苦自学岁月的磨坊依然存在，到诺丁汉访问的人，很远就可以看到它耸立的风轮。诺丁汉市决定维护好格林遗址，作为对这位磨坊工出身的数学家的永久纪念。

文　　献

原始文献

[1] N.H. Ferrers (ed.), Mathematical papers of the late George Green, Fellow of Gonville and caius college, Cambridge, London, 1871.

研究文献

[2] H. Gwynedd Green A biography of George Green, mathematical physicist of Nottingham and Cambridge, 1793—1841, 见 M.F. Ashley (ed.), Studies and essays in the history of science and learning offered in Homage to George Sarton, On the occasion of his sixtieth birthday 31. Aug. 1944. Schumann, N.Y., 1946, pp. 549—594.

[3] J.E.G. Farina, The work and significance of George Green, the miller mathematician, 1793—1841, *Bulletin of the Institute of Mathematics and its Applications*, 12 (1976),4, pp. 98—105.

[4] L. J. Challis and D. phillips, George Green, miller, Nottingham Castle, 1976.

波　尔　约

蒋　中　池

（镇江师范专科学校）

波尔约，J.（Bolyai，Jańos）1802年12月15日生于匈牙利特兰尼西瓦亚的科罗日瓦（今罗马尼亚克卢日）；1860年1月17日卒于匈牙利毛罗什瓦萨尔海伊（今罗马尼亚特古穆列什）。数学。

波尔约的父亲F.波尔约（Bolyai）21岁进哥丁根大学，是著名数学家C.F.高斯（Gauss）的同学和终身好友，1804—1853年一直是毛罗什瓦萨尔海伊（Marosvásárhely）福音学院颇有名望的数学、物理、化学教授。在几何基础方面，他特别注重欧氏平行公设的研究，其数学代表作《写给好学青年的数学原理》（Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae）试图建立一个坚实而系统的几何基础及算术、代数、分析的基础。波尔约的生母S.V.阿卡丝（Arkos）是一位外科医生的女儿，死于1821年；后母T.娜格（Nagy）是一位铁商的女儿。

波尔约在父亲指导下，少年时代就学习了微积分、分析力学等高深学科的基础知识。1818年考人维也纳帝国工程学院，在数学及其他学科上显示了天才，1822年毕业分配至军事部门，从事军事研究工作。1833年不幸遭车祸致残，他退役回到父亲家里，不久后母去世，两人在一起常有冲突，最后波尔约迁至偏辟的多马尔德（Domald）地区过着隐居式的生活。1834年，他与当地妇女R.V.娃本（Orbam）结婚，生有三个孩子，生活极端艰苦。1856年其父去世，同年他又与妻子中断了关系，晚年专心于文艺创作。他

死于肺病，埋葬在奥匈帝国偏辟小镇毛罗什瓦萨尔海伊的墓地里。

波尔约是非欧几何创始者之一。1894年，匈牙利数学物理学会主持修复了他的墓地，并建造雕像，供人景仰。1905年，匈牙利科学院高度表彰了他的功绩，颁发了以他命名的国际数学奖，奖励那些为数学进展作出巨大贡献的人，著名数学家 J. H. 庞加莱 (Poincaré)、D. 希尔伯特 (Hilbert) 及物理学家 A. 爱因斯坦 (Einstein) 都曾获得这个大奖。

欧几里得《几何原本》(Elements) 第1卷的第5个公设是平行公设："若两直线和第三直线相交，且在同一侧所成的两个同旁内角之和小于两直角，则这两直线无限延长后必相交于该侧的一点"，实质是说明"在平面上过直线外一点，只能作一条直线与它平行"。但这一公设不象其他公设那样便于在实践中检验，欧氏也只是在证明第29个命题时才用到它，且在此后任何命题中不再引用。一部体系严密的经典著作出现这样文字冗长又非显而易见的公设似乎是个缺陷，从希腊时代到18世纪两千余年间，许多学者试图证明它，然而他们大都不自觉地引用了与第五公设等效的命题，因而使愿望落空。C. 托勒密 (Ptolemy)、J. 沃利斯 (Wallis)、G. 萨凯里 (Saccheri)、M. 勒让德 (Legendre) 等都进行过这种失败的尝试，但也有收获，因为他们弄清了一系列与第五公设等价的命题，其中萨凯里作了最重要的工作，他用间接证法试证第五公设，但犯了一个错误，他把有限图形的性质扩大到无限图形，以为在有限远处不成立的东西在无限远处也不成立，以致步于伟大发现的门边而停步了。1736年 G.S. 克吕格尔 (Kerügel) 在他的论文中指出：(1)公理的实质在于经验，而并非不证自明，人们之所以接受欧氏平行公设的真理是基于人们对空间观念的经验；(2)欧氏平行公设的可证明性值得怀疑，萨凯里并没有得出矛盾，他只得到似乎异于经验的结果。对上述提示，T. H. 兰伯特 (Lambert) 作了进一步的研究，认识到一组假设如果不导致矛盾，一定可以提供一种可能的几何。受此影响，F. K. 施威卡特

(Schawikart)在1818年送交高斯征求意见的备忘录中已区分了两种几何:欧氏几何与假设三角形内角和不是两直角的几何;他的外甥F.A.托里努斯(Taurinus)续续进行研究,在有关著作中叙述了如何用纯粹形式的分析方法展开由锐角假设所导出的几何,他取球半径 $r = \rho i$,证明了虚半球面上成立的公式恰好是他所研究的星空几何中的公式.遗憾的是,他认为只有欧氏几何对物质空间才是正确的,而星空几何只是逻辑上无矛盾,他不能想象使锐角假设成立的空间,因而把锐角假设作为一个非实在的东西予以抛弃了.从克吕格尔到托里努斯,这几位学者都已承认第五公设的不可证明性,即第五公设相对于欧氏其他公设是独立的;但他们都没有认识到,就描述物质空间的性质来说,欧氏几何并非是唯一的几何。

由于一连串的失败大多出于名家之手,不少人便望而却步,直到19世纪初,仍流行着G.W.F.黑格尔(Hegel)的论点:欧氏几何相当完备,"不可能有更多的进展",教会保守势力正好利用这点宣扬上帝创造万物是"亘古不变的".欧氏几何数千年的垄断性的全线突破、非欧几何体系的全面探讨,应归功于高斯、H.И.罗巴切夫斯基(Лобачевский)及波尔约,而以后两者为主。

波尔约的父亲对欧氏平行公设问题探讨了大半辈子而徒劳无益。1820年,在大学就读的波尔约继承了父亲对平行公设的研究.开始,他也是从正面入手,试图用欧氏其他公设来证明平行公设,结果失败了.其父坚决反对儿子堕入在他看来是前途渺茫的深渊,1820年写信责令儿子必须停止这项研究,信中说:"它将剥夺你所有闲暇、健康、思维的平衡及你一生所有的快乐.这个无底的黑暗或许可以吞吃掉一千个灯塔式的牛顿,这个夜任何时候也不会在大地上光明。"但波尔约并未被如此骇人听闻的言词所吓倒,他一方面深入了解和分析前人的研究过程;另方面又对自已所作研究进行认真的反思。他在与A.脱莱坎(Teleki)伯爵的管家K.悉阿斯(Siasr)的交谈中得到启发,开始用归谬法证明,即从反面来考虑命题,看否定平行公设能否引出与欧氏几何的其他

公设或公理相悖的结果．在他不遗余力的严密推理下，不但没有发现任何矛盾,反而推出一系列全新的无矛盾的结论，为此，他断言第五公设是一条独立的公设，若能找到替代此公设的“平行公设”,便可以构成一门独立的新几何.这一别开生面的思想,使他独辟蹊径,构造了“新几何学”,他把它称为绝对几何,后人称为“虚几何”、“双曲几何”或“罗巴切夫斯基几何”，这是一种非欧几何．经过几年的艰苦努力。他于1823年写成了著名论文《空间的绝对几何学》（Appendix explaining theabsolutely true Sácnce of space)，时年21岁。11月3日,他兴奋地给父亲发出信函：“我决定出版自己关于平行线的著作,……,我已从乌有创造了另一个全新的世界”,他把手稿寄给父亲,请求父亲帮助出版,其父不相信这么年轻的儿子会有什么成就，更看不到冲破传统观念的束缚对科学发展和造就人才的意义,对儿子研究成果的反映非常冷淡,拒绝协助出版．1825年2月波尔约回家探亲,特地把含有绝对空间理论的这一文稿当面送给父亲看，其父为新几何中依赖于一个任意常数而迷茫,仍不能接受这种几何学．1826年，他把论文的德文抄稿寄给母校的数学老师,请求评审和支持,不幸抄稿遗失了．

在波尔约表现出非凡的数学天才之际,其父也于1829年完成了他的《写给好学青年的数学原理》二卷,含三个附录.1831年,经波尔约再三请求，其父才勉强同意将他的论文作为该书的《附录》之一出版,这篇被压缩到24页的的论文，是波尔约一生中发表的唯一成果.1831年6月20日其父写信给高斯,并将儿子《附录》样稿寄给他,想听听他的意见,但高斯没有回信，1832年1月16日又给高斯去信,高斯在3月6日的复信中写道:“关于你儿子的工作,当我一开始便说我不能称赞他时,你一定会感到震惊……,因为称赞他便等于称赞我自己，文章所有内容，你儿子采取的思路、方法以及所达结果，和我在30至35年前已开始的一部分工作完全相同，我真是被这些结果吓住了，……，但我本来就是不愿发表的,……”.信中虽夸奖波尔约是“头等品质的天才”,信的结尾还有注记,其中包括让波尔约确定如何在他的几何里求四面体的体积,

但波尔约还是感到心情沉重，他不相信别人比他更早达到同一结果，认定高斯在这个发现上要夺优先权，尽管他后来相信高斯所讲是真话，仍认为高斯没有公开自己的发现是一个错误。由于高斯的那封回信，更由于文章历尽艰辛而出版后却没有引起多少反应，当罗巴切夫斯基独立研究的同样成果发表后，他甚至变得恼怒，以致有一段时间陷于失望而影响了数学工作。1837 年，父子两人克服种种困难，参加了由莱比锡加勃罗诺协会（The Jablonow Society in Leipzig）赞助的关于"虚量的严格几何构造"（The rigorous geometric construction of imaginary quantities）问题有奖征解数学竞赛，以重振他俩在数学界的威望，但二人的解答因太复杂而落选。后来，波尔约研究过绝对空间中四面体的体积，并在 1856 年写成一个注记。

波尔约一生中的最大成就是独立创建绝对几何。他首先摒弃了欧氏第五公设，建立了绝对空间的概念：在空间的平面上，过直线外一点有一束直线不与原直线相交。当这束直线减少为一条时，该空间就是欧氏空间。他用这一"平行公设"替代了欧氏平行公设，再与欧氏其他公理、公设结合，逻辑地演绎出一系列全新的、彼此相容的命题，建立起非欧几何。它与欧氏几何的主要差别，在于共面不交线这方面。非欧几何中，过定点和定直线共面的不交线有无穷多条；而欧氏几何中，过定点和定直线共面的不交线只有一条。这种非欧几何体系是否存在？用公理化的方法来探讨，即非欧几何体系的整个公理体系是否在逻辑上相容？如何能唯一地确定一个非欧几何体系？波尔约的重大贡献就在于他独立地、成功地解答了上述问题。

在本质上，一种几何体系就是空间的一种数理模型，而一个几何体系的"公理体系"就是它的一组特征性质，它提供了这个抽象模型的一种简要描述，也是对于这个模型的其他性质探讨的逻辑基础。波尔约的思想方法可描述如下：以 A' 表示两种几何共同的公理集合，以 $/\!/_E$ 表示欧氏几何的平行公理，$/\!/_N$ 表示非欧几何的平行公理，则

$$\begin{cases}\text{欧氏公理体系}=A_E=A'\cup\{/\!/_E\},\\ \text{非欧公理体系}=A_N=A'\cup\{/\!/_N\}.\end{cases}$$

因为$/\!/_E$和$/\!/_N$显然不相容，所以他的非欧公理的合理性也就直观地回答了：$/\!/_E$不可能是A'的逻辑推论．对于$/\!/_E$的逻辑关系可分为两类：第一类只用A'中的公理就能推导出来，这显然是两种几何所共有的；第二类是只在欧氏几何中成立而在他创立的新几何中不成立的性质，这显然依赖于$/\!/_E$．他精辟地分析了A'的各种逻辑推理，研究了这些基本性质和$/\!/_E$之间的逻辑关系，建立起一系列深刻的定理．在对于共面不交线与平行线的的讨论上，他特别细心地分成$/\!/_E$和$/\!/_N$两种不同情况，指明只有与$/\!/_E$有关的命题，两种几何才有完全不同的内容．他的几何与欧氏几何相比，主要有三个新内容：(1)“平行”是具有方向性的；(2)三角形内角和小于二直角，且其内角和可以任意小；(3)三种线束模型——平行线束(同向)、共点线束、超平行线束(同垂直于一直线)．由于他指明的平行线意义和条数与欧氏几何的根本差异，在他创立的新几何中审定了如下主要结论：(1)平行线的不变性；(2)平行线的对称性；(3)平行线的传递性；(4)由A'可推出，过直线l的线外定点p，恒存在至少一条和l共面的不交线；(5)两平行线在平行方向无限接近，在相反方向则无限远离；(6)同一直线的垂线与斜线不一定相交，因此过不共线三点不一定可作圆；(7)共面不交的两直线被第三直线所截，同位角(或内错角)不一定相等；(8)两三角形若有三内角对应相等，则两三角形必全等(即不存在相似而不全等的三角形)；(9)萨凯里四边形的上底角小于直角，这说明非欧平面上不存在矩形；(10)非欧几何中存在“绝对的长度单位”．

波尔约非欧几何与欧氏几何的差异，突出地表现在三角形内角和方面．他由A′导出三角形的内角和小于两直角$2d$，且内角和随此三角形面积的增大而减小，当面积趋近于零时，它趋近于$2d$．更确切地说，有

$$S_{\triangle ABC}=K[2d-(\angle A+\angle B+\angle C)], \qquad (1)$$

其中K是取定的一正常数，差$2d-(\angle A+\angle B+\angle C)$称为

ΔABC 的"亏值".上式表明，三角形的面积与这三角形的亏值成正比，易见当 $S_{\Delta ABC}$ 增大时，亏值亦增大，从而内角和减小。公式(1) 与球面三角形的面积公式

$$S_{\Delta ABC}=R^2(A+B+C-\pi) \tag{2}$$

接近。实际上，当 $R=\sqrt{-R}=\sqrt{R}\,i$ 时，(2) 式便是(1)式.

波尔约在绝对三角和球面三角方面也做了不少出色的工作.例如:

(1) 由 A′ 推出波尔约正弦定律：对于任意 ΔABC，有

$$\frac{\sin A}{\odot a}=\frac{\sin B}{\odot b}=\frac{\sin C}{\odot c},$$

其中 a,b,c 分别表示 $\angle A,\angle B,\angle C$ 的对边之长，而 $\odot a,\odot b,\odot c$ 分别表示以 a,b,c 为半径的圆周长. 他给出了这一定律的逻辑证明.

(2) 给出 $\odot r$(半径为 r 的圆周长)在三种几何中的表达式:

$$\odot r=\begin{cases}2\pi r & \text{(欧氏几何)},\\ \dfrac{1}{K}\sin Kr & \left(\text{球面几何}, K=\dfrac{1}{\text{球半径}}\right),\\ \dfrac{1}{K}\sin hkr & \text{(非欧几何)}.\end{cases}$$

(3) 给出了三种几何中的余弦定理

$$\begin{cases}\text{欧氏几何:} & c^2=a^2+b^2-2ab\cos C \text{ 等},\\ \text{球面几何:} & \cos C=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos c \text{ 等},\\ \text{非欧几何:} & \cos \mathrm{h}c=\cos \mathrm{h}a\cos \mathrm{h}b+\sin \mathrm{h}a\sin \mathrm{h}b\cos C \text{ 等}.\end{cases}$$

显然，在球面、非欧的情形，上述公式只是 $K=1$ 时的特殊情形. 他给出的非欧三角公式实际就是半径为纯虚数 $\sqrt{R}\,i$ 的球面几何学中的三角公式，所以非欧平面与半径为纯虚数的球面是相似的几何对象. 这种正确的认识深化了非欧几何的研究，并推动了球面几何学的发展.

波尔约的几何与罗氏几何在原理上非常相似，尽管他们的论文形式很不相同. 后来，B. 黎曼 (Riemann) 又发展了他们的思

想，1854 年在哥丁根大学的讲演中提出了另一种非欧几何，这种理论在他生前也未得到应有的评价。

非欧几何最终被人们所承认是其创造者死后的事情。波尔约作为《附录》的论文原为拉丁文，1867 年译成法文，1868 年译成意大利文，1872 年译成德文，1891 年译成英文。意大利数学家 E. 贝尔特拉米 (Beltremi) 在 1868 年的论著中又用微分几何的理论作出了非欧几何的模型，证明了只要欧氏几何学没有矛盾，则非欧几何学也没有矛盾；德国数学家 F. 克莱因 (Klein) 在 1871 年首次认识到从射影几何中可推导度量几何，并建立了非欧平面几何(整体)的模型；希尔伯特给出欧氏几何学完备的公理体系，证明了平行公理对其他公理是独立的，因而明确了非欧几何学成立的逻辑基础；爱因斯坦根据相对论证明了把我们所在的时空看作非欧空间的合理性，所以非欧空间对于空间型的问题也非常有用。这些研究最终使非欧几何获得了普遍的承认和应用，打破了欧氏几何的一统天下，从根本上革新了人们的几何学观念。非欧几何对于 20 世纪初关于空间和时间的物理观念的变革也起了重要作用。非欧几何首先提出了弯曲空间，它为更广泛的黎曼几何的产生创造了前提，而黎曼几何后来成了爱因斯坦广义相对论的数学工具，人们在广义相对论的基础上研究了宇宙的结构，认识到宇宙结构的几何学是接近于非欧几何的。在天体大范围观测和原子论微观世界中有效的应用，充分显示非欧几何的创立有重大的哲学价值和划时代的意义。

波尔约创立非欧几何的功劳是不可磨灭的。非欧几何被后世誉为“19 世纪最有启发性、最重要的数学成就”。它与这一时期创立的近世代数一起，改变了人们处理数学问题的观点和方法，迎来了数学发展的新时代。

文　献

原始文献

[1] D. E. Smith, A source book in mathematics, New York, 1959, pp. 375—388.
[2] G. B. Halsted, "Appendix" with an introduction, Austin, Texas, 1891; Newed,

Chicago-london, 1914.
[3] R. Bonola, Non-Euclidean geometry, New York, 1955.

研究文献

[4] P. Stäckel and J. Bolyai, Geometrische Untersuchungen, Leipzig, 1913.
[5] D. M. Y. Sommerville, Bibliography of non-Euclidean geometry, London, 1911.
[6] I. Toth, Life and work of Johann Bolyai, Bucharest, 1953.
[7] D. J. Struik, Bolyai, János, 见 Dictionary of scientific biography, Vol. 2, 1973, pp. 269—271.

格 拉 斯 曼

陈 竹 如

（吉安师范专科学校）

格拉斯曼，H.G.(Grassmann, Hermann Günther) 1809年4月15日生于德国波美拉尼亚的斯德丁（今波兰什切青）；1877年9月26日卒于斯德丁．数学．

格拉斯曼出生于一个知识分子家庭，父亲贾斯特斯（Justus）研究过神学、数学和物理学．母亲J．美登沃尔德（Medenwald）是一位牧师的女儿．在他们家的12个孩子中，格拉斯曼排行第三．他40岁才结婚，妻子M．T．纳普（Knappe）是一个地主的女儿，生有11个孩子，其中卢多尔夫（Ludolf）成为物理学家，赫尔曼（Hermann）成为数学家，其他人也多有成就．

格拉斯曼最初的教育来自母亲和一所私立学校．18岁时他通过了中等学校的最后考试，随后与他的长兄古斯塔夫（Gustav）一起在柏林大学学了三年神学和古典语言文学．

1830年秋，格拉斯曼回到斯德丁，开始自学数学和物理．1832年在斯德丁得到一个大学预科助教的职位．1834年通过斯德丁的教会代表会议主持的第一级神学考试，这年秋天到柏林的格沃贝舒里学校当副校长，1835年又被派到斯德丁新成立的奥托学校任教．他教过数学、物理、德语、拉丁语和宗教等课程．同时，在任教期间仍进行神学、数学和自然科学等方面的研究．1839年，他在斯德丁通过了第二级神学考试．次年又在柏林通过了数学、物理、化学和矿物学方面的考试，从而取得了担任中等学校各级教学工作的资格．此后，格拉斯曼在教学上花了较大的精力，编写了几本中学课本．1852年，他接替父亲的工作，在斯德丁大学预科做了

四级教师,这是一个可以获得教授头衔的职位.

格拉斯曼兴趣广泛,多才多艺,早在青年时期就在多方面取得成绩. 1846 年,他的《解析几何》(Geometrische, Analyse) 得到公众好评,并获得莱比锡科学协会的最高奖赏. 1845 年, 他出版了《电动力学理论》(Neue Theorie der Elektrodynamik), 书中以新的定律取代了安培关于两个极小的电流元件相互作用的基本定律. 1853 年又发表文章“混色理论”(Zur Theorie der Farbenmischung). 1864年,他因物理方面的成绩被选为利奥波德学会会员. 另外,他还是梵文权威,也曾努力学习过哥德语、立陶宛语、古波斯语、俄语和教会斯拉夫语, 并在此基础上研究比较语言学. 1860 年, 他开始对吠陀经典赞美诗进行深入研究,写成《吠陀经典词汇表》(Wörterbuch zum Rigveda) (1873—1875), 此书至今仍在广泛应用。 1876—1877 年间,他又写成赞美诗的德文译本. 他的这些成绩得到学术界的好评, 很快为学者们所接受, 使他在 1876 年成了美国东方学会的成员. 蒂宾根大学哲学系授予他名誉博士学位.

格拉斯曼的数学成就远远走在他那个时代的前面. 他是一位自学成才的数学家, 1832 年就开始了一种新的几何演算法的研究. 他意识到自己工作的深远意义,到 1840 年已把全部精力集中到数学方面的研究. 1843 年秋, 他完成了名著《线性扩张论》(Die lineare Ausaenuangslehre) 的第 1 卷,于 1844 年发表. 可惜的是它的基本意义没有被当时人们所领会, 因为其内容实在比当时的数学水平深得多,而且叙述抽象,在文中还夹杂着哲学理论和神秘的教义. 1845 年以后他又写了很多书和文章,将他的理论应用到物理及代数曲线和曲面上, 但也没有获得人们的理解. 于是他把《线性扩张论》修改加工,更名《扩张论》(Die Ausaenuangslehre), 于 1862 年在柏林出版. 但此书还是没有用具体明确的例子说明他的新概念, 仍然十分难懂, 没有受到学术界重视. 连续几次失败使他失望, 53 岁以后逐渐离开数学, 专门研究梵文.

直到格拉斯曼晚年的时候, 人们才注意到他的数学著作的价

借。1871年，他被选为哥丁根科学院的通讯会员。这时他已年老体弱，但一直坚持工作。在他去世后，专家们务力把他的《扩张论》向数学界介绍，还有人为他写了传记，在他一百岁诞辰时出版了他的论著全集。

格拉斯曼在数学上的主要贡献表现在他对多维空间的研究。多维空间产生的原因之一，是在解决代数和分析的问题时试图利用几何方法。当时已有用几何方法解决纯代数问题的先例。但是如果未知数多于三个，三维空间就不够用了。为了保留有效的几何思想方法，就需要引入抽象的 n 维空间概念。这种空间的点由 n 个坐标决定，从而把在三个变数时起作用的几何方法应用到任意个变数的情形。

在解析几何与综合几何的基础上，G.W. 莱布尼兹(Leibniz)曾设想过这种几何分析，但他没有深入阐述自己的观点。格拉斯曼首次提出了多维欧几里得空间的系统理论。1844年他在《线性扩张论》中引入欧几里得 n 维空间概念，研究了点、直线、平面和两点间的距离，并推广到 n 维空间，研究了抽象几何空间中的 n 阶曲线，发展了莱布尼兹把代表几何实体的符号按一定规则来处理的代数思想。

《线性扩张论》所论述的几何分析，是一个介于解析几何与综合几何的边缘领域。几何分析的所有体系具有共同特点，它们的基本成分是有向线段的几何加法，并且借助于复数的平面几何描述。在《线性扩张论》中格拉斯曼融合坐标、向量及复数等概念于 n 维空间，大胆地开拓了数学的新领域。

“向量空间”概念在以前数学家的论著中是不够明确的，格拉斯曼第一个明白地解释了“n维向量空间”的概念，他把 n 维向量空间的向量和与积用纯几何方法来定义，发展了通用的向量演算法。

格拉斯曼与 W. R. 哈密顿(Hamilton)同时分别建立了超复数，格拉斯曼还引入了超复数的两类乘法(内积和外积)，从而建立了一种有 n 个分量的超复数几何学，所以他是复抽象几何学的

奠基人。

由于坐标选择带有任意性，可能使问题复杂化。人们希望把几何学和物理学上确实重要的部分，与由坐标的选择额外产生的部分分开，于是便产生了张量概念。用张量来描述的物理定律和几何定理所得到的结果，在任何坐标系下都具有不变的形式。

格拉斯曼称他的基本概念为扩张的量（extensive Grösse），即张量。这是一种有 n 个分量的超复数，下面用 $n=3$ 的情况为例来说明他的思想。设两个超复数 $\alpha=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\alpha_3e_3$，$\beta=\beta_1e_1+\beta_2e_2+\beta_3e_3$，其中 α_i 和 β_i 是实数，而 e_1,e_2 和 e_3 是原始的或定性的单元。α 和 β 都是空间中的一个有向线段，α_i 和 β_i 分别是 α 和 β 在各轴上的投影长度。其加减法由下式定义，

$$\alpha+\beta=(\alpha_1+\beta_1)e_1+(\alpha_2+\beta_2)e_2+(\alpha_3+\beta_3)e_3.$$

对超复数的内积，他假设 $e_i|e_i=1$，$e_i|e_j=0$，$i\neq j$，α 和 β 的内积 $\alpha|\beta=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3$，且有 $\alpha|\beta=\beta|\alpha$。$\alpha$ 的大小为 $\sqrt{\alpha|\alpha}=\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}$，即表示 α 的线向量的长度。若用 θ 表示线向量 α 和 β 之间的夹角，则

$$\alpha|\beta=ab\left(\frac{\alpha_1\beta_1}{ab}+\frac{\alpha_2\beta_2}{ab}+\frac{\alpha_3\beta_3}{ab}\right)=ab\cos\theta$$

（a,b 分别是 α,β 的线向量）。

对超复数的外积 P，他假设 $[e_ie_j]=-[e_je_i]=e_{ij}(1<i<j\leqslant n)$，$[e_ie_i]=0(1\leqslant i\leqslant n)$，

$$P=[\alpha\beta]=(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)[e_2e_3]+(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)[e_3e_1]$$
$$+(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)[e_1e_2],$$

且有 $\alpha\beta=-\beta\alpha$。

$$|P|=\sqrt{P|P}=\{(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)^2+(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)^2$$
$$+(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)^2\}^{\frac{1}{2}}$$
$$=ab\left\{1-\left(\frac{\alpha_1\beta_1}{ab}+\frac{\alpha_2\beta_2}{ab}+\frac{\alpha_3\beta_3}{ab}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$=ab\sin\theta.$$

所以$|P|$就是一个平行四边形的面积. 如果两个向量位于同一直线,则它们的积是0; 否则它们张成一个位于某一平面并有一确定面积的平行四边形.

对两个积 ab 和 cd 相等,格拉斯曼解释为:它们位于平行平面之中,张成的面积相同,并且从 c 到 d 和从 a 到 b 有相同的旋向。至于三个向量的积,则可构成一个有向平行六面体.他还考虑了高阶乘积. 1855 年又对超复数给出了 16 种不同类型的乘积及其几何意义. 并在力学、磁学、晶体学等方面作了应用.

与格拉斯曼几乎同时而独立地用分析方法研究 n 维几何的,还有 A. 凯利 (Cayley) 和 G. 黎曼 (Riemann). 他们都是通过与普通解析几何作形式类比而进行的,但影响不及格拉斯曼. 虽然他的 n 维超复数分析终究未建立起来 (因为没有发现这种分析的应用),但他的思想引导数学家进入张量理论. 张量的引入,使数学家们既采用坐标又摆脱具体坐标系的影响,使推导简化,而且能充分反映事物的属性. 它在力学、几何学、电磁场及相对论等方面有着广泛的应用. 20 世纪 80 年代欧美国家掀起了学习和应用张量的热潮. 我国随着计算数学、应用数学的发展,张量理论也受到很多专家的重视.

J. 吉布斯 (Gibbs) 和 O. 希维赛德 (Heaviside) 创立向量代数, 也受到格拉斯曼的很大影响. 向量代数可以从格拉斯曼和哈密顿的概念中导出, 吉布斯曾说过他更喜欢格拉斯曼的限制较少的概念. 格拉斯曼的著作还影响着线性矩阵代数的诞生, 在其著作中已有这方面知识的萌芽. 1862 年,格拉斯曼提出了矩阵化成三角式的方法,并论述了这种方法与射影变换之间的关系.

在代数方面,格拉斯曼的工作远远超过了哈密顿的四元数,他不只考虑实数有序四元数组, 而且考虑实数有序 n 元数组. 格拉斯曼还发展了一项他称为"代数的"乘法,它遵守定律 $e_ie_i = e_je_i$, $i = 1, \cdots, n$, 并导致了今天的多项式环.

格拉斯曼和哈密顿、凯利等数学家是近世代数的先驱,他们推出了不同于普通代数的、遵守某种结构规律的代数方法,具有深远

的意义．就象罗巴切夫斯基（Лобачевский）的发现导致几何的解放一样，格拉斯曼的工作导致了代数的解放，打开了现代抽象代数的大门。

格拉斯曼的分析研究还涉及普法夫方程

$$\omega = A_1(x_1\cdots x_n)dx_1 + \cdots + A_n(x_1\cdots x_n)dx_n = 0$$

的积分理论．他提出了一个重要定理：

如果把 k 视为 ω 类——就是说，ω 可以变换成变量的极小数量——那么，当 $k = 2h$ 时，ω 可变换成为范式 $Z_{n+1}dZ_1 + \cdots + Z_{2n}dZ_n$，而当 $k = 2h - 1$时，则可变换成 $P \cdot (dZ_h + Z_{h+1}dZ_1 + \cdots + Z_{2h-1}dZ_{h-1})$，这里的 P 是 $Z_1\cdots Z_{2h-1}$ 的函数。

格拉斯曼还研究了算术基础，他在《算术教本》（Lehrbuch der Arithmetik, 1861）中对算术基础作了科学论证，给出自然数加法和乘法的定义，并证明了加法和乘法的基本性质，如交换律、结合律、分配律等．他的研究以 $(a+b)+1 = a+(b+1)$ 为依据。

由于格拉斯曼的贡献，很多数学名词以他的名字命名，如格拉斯曼坐标、格拉斯曼锥体、格拉斯曼平面线性生成等等．他还首创了以坐标表示给定空间的子空间的方法，从而导致了称为格拉斯曼代数流形的映射点。

数学中的形式主义学派认为数学的真实性必须也只须建立在其公理系统的无矛盾性上．格拉斯曼可以说是这个学派的奠基人之一．这种形式主义观点，后来在 D. 希尔伯特（Hilbert）的学派中得到发展。

在政治上，格拉斯曼有很强的责任感．他参加了 1848 年德国的政治革命，并和他的兄弟罗伯特（Robert）办报纸，主张形成一个团结的、在普鲁士领导下的德国．格拉斯曼的一生是积极学习积极工作的一生，为社会作出了宝贵的贡献。

文　　献

原始文献

[1] H. G. Grassmann, Die Wissenschaft der extensiven Grösse oder die Ausdehnungslehre, Leipzig, 1844.

[2] H. G. Grassmann, Die Ausdehnungslehre, Vollständig und in strenger Form Bearbeitet, Berlin, 1862.

[3] F. Engel (编辑的格拉斯曼论著集), Mathematische und physikalische Werke, 3 vols. in 6 pts, Leipzig, 1894—1911.

研究文献

[4] V. Schlegel, Hermann Grassmann, sein Leben und seine Werke, Leipzing. 1978.

[5] R. Sturm, E. Schröder und L. Sohncke, H Grassmann, sein Leben und seine mathematisch-physikalischen Arbeiten. *Mathematische Annalen*. 14(1879), pp. 1—45.

[6] H Hankel, Theorie der komplexen Zahlensysteme, Leipzig, 1867.

[7] A. F. Möbius, Der baryzentrische Kalkül, Leipzig. 1827.

[8] H. G. Forder, Calculus of extension, Cambridge, 1941.